Reduktionen

- $\Gamma_1 \cup \{x^\rho\} \vdash t^\tau$; $\Gamma_2 \vdash s^\rho$; Γ_1, Γ_2 disjunkt $\Longrightarrow \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash t[s/x^\rho]^\tau$
- $\Gamma \vdash t^\tau$; $t \to t' \Longrightarrow \Gamma \vdash t'^\tau$
- Ein Term t heißt *fast geschlossen*, falls er getypt ist und alle freien Variablen den Typ $\diamond$ haben
- Jeder normale, fast geschlossene Term vom Typ $\mathbf{N}$ ist ein Numeral. Jeder normale, fast geschlossene Term vom Typ $\mathbf{L}(\tau)$ ist eine Liste. Jeder normale, fast geschlossene Term vom Typ bool ist $\mathbf{t}$ oder $\mathbf{f}$. Jeder normale, fast geschlossene Term vom Typ $\diamond$ ist eine Variable.

Länge

- Definition von $|t|$ durch Induktion(t):

  $$|c| = |x| = 1$$
  $$|ts| = |t| + |s|$$
  $$|\lambda x^\tau\, s| = |s| + 1$$
  $$|\langle t, s\rangle| = \max\{|t|\,, |s|\} + 1$$
  $$|\{t\}| = |\{t_1, t_2\}| = 0$$

- $\Gamma_1 \vdash t^\tau$; $\Gamma_2 \vdash s^\rho$; Γ_1, Γ_2 disjunkt $\Longrightarrow |t[s/x]| \leq |t| + |s|$

  Insbesondere ist $|(\lambda x^\tau\, t)s| > |t[s/x]|$.

- $\Gamma \vdash t^\diamond \Longrightarrow \Gamma \neq \emptyset$

spezielle Reduktionsstrategie

$$ts \quad \to^* \quad t's \quad \to^+ \quad @_s t' \quad \to^* \quad \ldots$$

"kanonische Redukte":

$(\lambda x\, t)s$	$t[s/x]$
$\mathbf{S}_{i_1} r_1^{\diamond}(\ldots(\mathbf{S}_{i_n} r_n^{\diamond} 0))\,\{h_0, h_1\}\, t$	$h_{i_1} r_1^{\diamond}(\ldots(h_{i_n} r_n^{\diamond} t))$
$\mathbf{cons}_\tau d_1^{\diamond} r_1^{\tau}(\ldots(\mathbf{cons}_\tau d_n^{\diamond} r_n^{\tau} \mathbf{nil}_\tau))\,\{h\}\, t$	$h d_1^{\diamond} r_1^{\tau}(\ldots(h d_n^{\diamond} r_n^{\tau} t))$
$\langle s, t\rangle\, \mathbf{t}$	s
$\ldots$	$\ldots$

Polynome

- Auf $\mathbb{N}[X]$ wird durch
$$\sum a_i X^i \preccurlyeq \sum b_i X^i \Longleftrightarrow \forall i . a_i \leq b_i$$
die teilweise Ordnung $\preccurlyeq$ definiert.
- $f, g \in \mathbb{N}[X]$; $f \preccurlyeq g$; $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow f(n) \leq g(n)$
- Definition von $\vartheta\,(t)$ durch Induktion(t):
$$\begin{aligned}
&\vartheta\,(x) = \vartheta\,(c) = 0\\
&\vartheta\,(ts) = \vartheta\,(t) + \vartheta\,(s)\\
&\vartheta\,(\lambda x^\tau\, t) = \vartheta\,(t)\\
&\vartheta\,(\langle t, s\rangle) = \sup_{\preccurlyeq} \{t, s\}\\
&\vartheta\,(\{t\}) = X \cdot \vartheta\,(t) + X \cdot |t|\\
&\vartheta\,(\{t, s\}) = X \cdot \sup_{\preccurlyeq} \{\vartheta\,(t)\,, \vartheta\,(s)\} + X \cdot \max \{|t|\,, |s|\}
\end{aligned}$$
- $\Gamma_1 \vdash t^\tau$,$\Gamma_2 \vdash s^\rho$; Γ_1, Γ_2 disjunkt $\Longrightarrow \vartheta\,(t[s/x]) \preccurlyeq \vartheta\,(t) + \vartheta\,(s)$

Das Resultat

$\Gamma \vdash t^\tau$; $\natural \in \mathbb{N}$, $\natural \geq |\mathrm{FV}(t)|$. Dann gibt es $t = t_0 \to t_1 \to \ldots \to t_k$ mit t_k normal und $\vartheta(t_k)(\natural) + |t_k| + k \leq \vartheta(t)(\natural) + |t|$