On Fragments of Analysis with Strengths of Finitely Iterated Inductive Definitions

Klaus Aehlig

18. Juli 2003

Die Arbeit geht über "Analaysis". Warum gerade "Analysis"? Was ist das besondere an reellen Zahlen? Betrachten wir zunächst die natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

Das entscheidende ist, daß wir das "und so weiter" hier sehr konkret machen können. Wir haben nämlich für *jede* natürliche Zahl einen Namen in unserer formalen Theorie, nämlich

$$\underline{n} = \underbrace{\mathcal{S}\mathcal{S}\ldots\mathcal{S}}_{n}0$$

Bei den reellen Zahlen ist das anders. Die Gesamtheit aller Benennungen die wir haben ist in jedem Fall abzählbar; aber wir können beweisen, daß die Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist. Und warum ist das ein Problem, nicht alles benennen zu können? Nun, weil wir dann keinen Überblick mehr haben. Mehr noch, *die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt*[1]. Nach dem Satz von Löwenheim Skolem gilt nämlich

$$(\exists \mathfrak{M}.\mathfrak{M} \vdash \mathrm{ZFC}) \qquad \Rightarrow \qquad (\exists \mathfrak{M}'.|\mathfrak{M}'| = \omega \wedge \mathfrak{M}' \vdash \mathrm{ZFC})$$

und wenn man den Beweis im Hinterkopf hat, dann sind die reellen Zahlen, die es in dem Modell $\mathfrak{M}'$ gibt, genau die durch Formeln beschreibbaren.

Das heißt, bei den reellen Zahlen reden wir von Dingen, von den wir keine genaue Vorstellung haben. (Nun gut, nach dem Satz von Löwenheim Skolem wissen wir, daß es auch furchtbar große Modelle von PA gibt, aber immerhin gibt es innerhalb dieser Modelle die natürlichen Zahlen, so wie wir sie kennen; nämlich als die Interpretationen der oben angegeben Terme.)

Es kommt also darauf an, nur von solchen reellen Zahlen zu reden, über deren Bedeutung und Existenz man sich sicher ist. Bis auf übliche Kodierungen können wir reelle Zahlen als Mengen von natürlichen Zahlen auffassen(!).

Mengen von natürlichen Zahlen werden üblicherweise durch Komprehension (genauer: Aussonderung) eingeführt, also durch Betrachten von

$$\{n \in \mathbb{N} \mid A(n)\}$$

[1] Ludwig Wittgenstein, Tractatus logico-philosophicus. Satz 5.6

Die philosophische Rechtfertigung einer solchen Definition hängt davon ab, wie die Formel A aufgebaut ist. Wenn hier nur auf vorher eingeführte Konzepte ($+$, $\cdot$, $=$, $<$, $\ldots$, aber auch das Konzept einer natürlichen Zahl) vorkommen, kann man sich ziemlich sicher sein, daß man weiß, was das bedeuten soll. Die Rechtfertigung ist aber wage, wenn in A auf die Gesamtheit $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ aller Mengen von natürlichen Zahlen Bezug genommen wird, etwa in dem darüber quantifiziert wird

$$\forall \underbrace{\mathfrak{X}}_{\in\mathfrak{P}(\mathbb{N})} . \quad \ldots \underbrace{\mathfrak{X}(t)}_{t\in\mathfrak{X}} \ldots$$

Dies ist der Fall, wenn über Eigenschaften, also zweitstufig qauntifiziert wird: während ich eine neue Menge einführe setze ich bereits Kenntnis über *alle* Mengen voraus...

Eine andere Art, Mengen von natürlichen Zahlen zu definieren ist durch induktive Definitionen. Dazu geben wir uns Regeln vor und betrachten die hiervon erzeugte Menge. Zum Beispiel

$$\begin{array}{lcr} & & 0 \in \widehat{\mathfrak{X}} \\ n \in \widehat{\mathfrak{X}} & \Rightarrow & 2^n \in \widehat{\mathfrak{X}} \\ \forall n. \{e\}(n) \in \widehat{\mathfrak{X}} & \Rightarrow & 3 \cdot 5^e \in \widehat{\mathfrak{X}} \end{array}$$

Es kommen also der Reihe nach folgende Zahlen in die Menge hinein

$$0, 1, 2, 4, \ldots$$

Einige Zeit später sind alle diese "natürlichen" Zahlen drinnen. Damit dann auch der Baum, der darüber verzweigt.

Formal sieht das also so aus, daß wir einen monotonen Operator

$$\Gamma \colon \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \to \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \text{ monoton}$$

haben und dann von unten her den Fixpunkt approximieren, also

$$\emptyset, \Gamma(\emptyset), \Gamma(\Gamma(\emptyset)), \ldots \qquad \Gamma^\alpha = \Gamma(\bigcup_{\beta<\alpha} \Gamma^\beta)$$

Man beachte, daß diese Folge monoton ist. (Denn die Vereinigung ist monoton, und Γ auch.)

Auf diese Weise approximieren wir die kleinste Γ-abgeschlossene Menge. Anders ausgedrückt, wir betrachten den Schnitt über alle Γ-abgeschlossenen Mengen, also

$$\bigcap \{\mathfrak{X} \mid \Gamma(\mathfrak{X}) \subset \mathfrak{X}\} \qquad := \Gamma^\infty$$

Dies können wir in der Arithmetik zweiter Stufe einfach hinschreiben, wenn Γ definierbar war. Damit dann wieder neue Operatoren und damit neue Fixpunkte etc...

Aber brauchen wir dafür die volle Macht der Arithmetik zweiter Stufe? Schauen wir uns diese Formel genauer an, wobei wir annehmen, daß Γ durch eine *Formel* $\mathfrak{A}(\mathfrak{X}, x)$ beschrieben werden kann.

$$x \in \Gamma^\infty \;\equiv\; \forall \mathfrak{X}.(\forall y. \underbrace{x \in \Gamma(\mathfrak{X})}_{\mathfrak{A}(\mathfrak{X},x)} \to \mathfrak{X}y) \to \mathfrak{X}x$$

Keine zweitstufigen freien Variablen, genau eine weitere zweitstufige Quantifikation.

Zusammenfassend

- Variablen $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_{n^*}$ vom Level $0, 1, \ldots, n^*$
- $\forall \mathfrak{X}_k.A$ nur falls A von Level $\leq k$, $\mathrm{FV}(A) \subset \{\mathfrak{X}_k\}$

HA^2 mit dieser Sprache $=: \mathrm{HA}^2_{n^*}$

Und diese Fragment wollen wir jetzt wieder mittels induktiver Definitionen verstehen.

Bevor wir das tun aber erst mal eine genaue Formulierung der Resultate. Die Systeme

$$\mathrm{ID}_n \qquad \longleftrightarrow \qquad \mathrm{HA}^2_{n+1}$$

wollen wir als "gleichwertig" erkennen.

Warum eigentlich $n+1$? Nun, in ID_n haben wir noch Induktion, in der von uns betrachteten zweitstufigen Arithmetik aber nicht. Also müssen wir die Übersetzung auf "natürliche Zahlen" relativieren

$$\forall n.A \qquad \rightsquigarrow \qquad \forall n.\mathbb{N}n \to \tilde{A}$$

Und in welchem Sinne erhalten wir denn nun Gleichwertigkeit? Zunächst einmal in der schwachen Form von Äquikonsistenz:

$$\mathrm{PRA} \vdash \mathrm{Con}(\mathrm{ID}_n) \leftrightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{HA}^2_{n+1})$$

wobei es hier *wichtig* ist, daß diese Äquikonsistenz bereits in der schwachen Theorie PRA beweisbar ist.[2]

Wir erhalten aber sogar noch mehr:

$$\mathrm{ID}_n \vdash \forall x \exists y R(x,y) \text{ gdw } \mathrm{HA}^2_{n+1} \vdash \forall x.\mathbb{N}x \to \neg\forall y(\mathbb{N}y \to \neg R(x,y)).$$

Und auch diese Äquivalenz können wir in der primitiv rekursiven Arithmetik beweisen.

Man beachte, daß der "Typ" (im Sinne der zweitstufigen Struktur) der Formel der Arithmetik zweiter Stufe moralisch $\mathcal{N} \to \mathcal{N}$ ist. Dies kann verwendet werden, um die beweisbar rekursiven Funktionen als Fragment von System F zu characterisieren, was wir in diesem Vortag aber nicht tun werden.

Was genau heißt eigentlich verstehen? Ist es nicht so, daß wir alle unsere Axiome wahr sind, und unsere Schlußregeln uns aus wahrem nur wahres folgern lassen? Aber: "Was ist Wahrheit?"[3] Nun, außer der Undefinierbarkeit

[2] Man beachte, daß etwa aus der Sicht der Mengenlehre *alle* betrachteten Theorien konsistent sind!

[3] Joh 18,38

des Wahrheitsbegriffs haben wir noch das Problem, daß wir von zweitstufigen Objekten reden und ja selber keine Ahnung haben, wie die Aussehen sollen!

Wobei, so falsch ist das Argument mit der Wahrheit gar nicht: wenn wir einen Beweis haben, in dem nur *arithmetische* Formeln vorkommen, dann wissen wir was Wahrheit sein soll und wir folgern nur Wahres aus Wahrem. Also müssen wir eine Möglichkeit finden, unsere Beweise so umzubauen, daß Beweise arithmetischer Formeln nur arithmetsiche Formeln enthalten. Das ist auch die Idee der Beweistheorie, daß Beweise Gegenstand formaler Untersuchungen sind.

Das wichtigste verwendete Hilfsmittel ist die Ω-Regel, eingeführt von Buchholz. Diese läßt sich folgendermaßen motivieren.

Von allen Schlußregeln der Arithmetik zweiter Stufe besitzt (neben dem Schnitt) nur eine *nicht* die Teilformeleigenschaft, nämlich die Besitigungsregel für zweitstufige Quantifikation.

$$\frac{\forall \mathfrak{X} A}{A[\mathfrak{X}{:=}\mathcal{A}]}$$

Erinnern wir uns daran, wie wir das entsprechende Problem in der Arithmetik gelöst haben. Dort war das Probleme die Induktionsaxiome, da die dort vorkommende Formel beliebige logische Komplexität haben konnte. In den halbformalen System hatten wir eine Regel eingeführt, die Induktion zur *zulässigen* Regel werden ließ, nämlich die ω-Regel

$$\frac{\dots A(\underline{n}) \dots}{\forall x A(n)} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Wir wollen also eine ähnliche Regel einführen, die die Beseitigung für $\forall \mathfrak{X}$ zulässig macht. Dazu fragen wir uns zunächst, warum die Beseitigungsregel für zweitstufige Quantifikation sich nicht bei den anderen Regeln als zulässige ergibt. Bei "kanonischen" Beweisen

$$\begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ A(\mathfrak{X}) \\ \hline \forall \mathfrak{X} A(\mathfrak{X}) \end{array} \quad \mathfrak{X} \notin \mathrm{FV}(\Gamma)$$

können nämlich einfach alle Vorkommen von $\mathfrak{X}$ durch $\mathcal{A}$ ersetzen; nota bene: durch die Seitenbedingung wird das wieder ein Beweis aus *den selben* Annahmen.

Was aber mit Beweisen *aus Annahmen*?

$$\forall \mathfrak{X} A \vdash \forall \mathfrak{X} A$$

Das wesentliche an der ω-Regel war, uns auf Ziffern, also *kanonische* Terme zu beschränken. Bei der Ω-Regel ist nun die Idee, die Schnittelemination zu antizipieren. Zwar haben wir im Augenblick vielleicht nur eine Herleitung aus komplizierten Annahmen, aber nach und nach werden diese Annahmen durch Beweise ersetzt werden und sich kanonische Beweise ergeben. Dies motiviert, es bereits als Beweis einer Formel C anzusehen, wenn wir einen Beweis von $\forall \mathfrak{X} A$ haben und *für alle kanonischen Beweise* von $\forall \mathfrak{X} A$ einen Beweis von C haben. Damit das eine vernünftige Definition wird, muß der Beweisbarkeitsbegriff in Stufen kommen (und jeweils nur über die vorhergehende Stufe Quantifizieren). Dies geschieht entsprechend den Stufen unserer Sprache.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma\\ \vdots\\ \vdash_n \forall \mathfrak{X}_k A\end{array} \qquad \dots \begin{array}{c}\Gamma, \Delta\\ \vdots\\ \vdash_n C\end{array} \; d\colon \Delta \vdash_k \forall \mathfrak{X}_k A \; \dots}{\vdash_n C \quad (\textit{aus Annahmen } \Gamma)} \qquad (k < n)$$

Man beachte, daß das eine vernünftige induktive Definition ist!

Da wir zumindest formal beweisen wollen, daß $\forall \mathfrak{X}$-Beseitigung damit zulässig wird, werden wir jetzt die halbformalen Herleitungen formal definieren.

> Für $n < n^*$ definiere iduktiv $d \vdash_n \Gamma \sqsupset A$ für $d \in \mathbb{N}$, A Formel und Γ Formelmenge $n+1$-ter Stufe.

Hierbei ist $\mathcal{I}^*_{n+1}$ die Sprache mit zweitstufigen Quantoren bis zum level $n+1$ und $(d)_0 \leq 4$ wird sich als "keine Einführung" herausstellen.

- $\langle 0 \rangle \vdash_n \Gamma \sqsupset A$ für A Axiom
- $\langle 1 \rangle \vdash_n \Gamma \sqsupset A$ falls $A \in \Gamma$.
- $d \vdash_n \Gamma \sqsupset A \to B$ mit $(d)_0 \leq 4$ und $e \vdash_n \Gamma \sqsupset A \quad \Rightarrow$ $\langle 2, d, e, \ulcorner A \urcorner \rangle \vdash_n \Gamma \sqsupset B$.

...

Irgendwann später kommen dann die Einführungsregeln, von denen wir uns aber nur die interessanten anschauen.

- $d \vdash_n \Gamma, A \sqsupset B \quad \Rightarrow \quad \langle 5, d \rangle \vdash_n \Gamma \sqsupset A \to B$.

...

- $d \vdash_n \Gamma \sqsupset A(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{X} \notin \mathrm{FV}(\Gamma) \quad \Rightarrow \quad \langle 8, d, \ulcorner \mathfrak{X} \urcorner \rangle \vdash_n \Gamma \sqsupset \forall \mathfrak{X} A(\mathfrak{X})$
- $k < n$, $d \vdash_n \Gamma \sqsupset \forall \mathfrak{X}_k A(\mathfrak{X}_k)$ und $(\forall \Delta \subset \mathrm{Neg}_k.\ d' \vdash_k \Delta \sqsupset \forall \mathfrak{X}_k A(\mathfrak{X}_k) \Rightarrow \{e\} (\langle d', \ulcorner \Delta \urcorner \rangle) \vdash_n \Delta, \Gamma \sqsupset C) \quad \Rightarrow \quad \langle 9+k, \ulcorner \forall \mathfrak{X}_k A(\mathfrak{X}_k) \urcorner, d, e \rangle \vdash_n \Gamma \sqsupset C$.

Hierbei hat die Formelklasse Neg_k nur Variablen mit level höchstens k und $\forall \mathfrak{X}_k$-Quantifikationen kommen nur negativ vor.

Wir schreiben im Folgenden $\vdash_n \Gamma \sqsupset A$, für ' $\exists d. d \vdash_n \Gamma \sqsupset A$.

> **Lemma.**
>
> $\vdash_n \Gamma \sqsupset A \quad \Rightarrow \quad \vdash_n \Gamma \Sigma' \Sigma \sqsupset A \Sigma' \Sigma$
>
> wobei

- Σ zweitstufige Substitution vom level n
- Σ' Permutation zweitstufiger Variablen vom Level $< n$

Und der Übergang ist primitiv rekursiv.

Beweis.

Induktion längs Definition von $d \vdash_n \Gamma \sqsupset A$.

Axiom: klar, da erststufig. *Wir haben nur die Definition der primitiv-rekursiven Funktionszeichen als Axiome. Insbesondere keine zweitstufigen Konzepte.*

...Die ganzen Beseitigungsregeln gehen im wesentlichen direkt via Induktionhypothese. Genau wie die allermeisten Einführungsregeln. Als nicht-triviale Fälle bleiben...

($\forall\mathfrak{X}$-intro). Induktionshypothese für die um $\mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}'$, mit $\mathfrak{X}'$ neu erweiterte Substitution *(bzw Permutation)* liefert $\vdash_n \Gamma\Sigma'\Sigma \sqsupset A(\mathfrak{X}')$. *Und damit kann* $\forall\mathfrak{X}$*-intro erneut angewendet werden.*

NB: wir haben höchstens eine *freie Variable. Außerdem* $\mathfrak{X} \notin \mathrm{FV}(\Gamma)$

(Ω_{k+1}). *Idee ist, wieder mit der* Ω_{k+1}*-Regel zu schließen.* Nach Induktionsvoraussetzung $\vdash_n \Gamma\Sigma'\Sigma \sqsupset \forall\mathfrak{X}_k A$.

Sei $\Delta \subset \mathrm{Neg}^2_k$ und $d' \vdash_k \Delta \sqsupset \forall\mathfrak{X}_k A$; nach Induktionsvoraussetzung $\vdash_k \Delta\bar{\Sigma'} \sqsupset \forall\mathfrak{X}_k A$ wobei $\bar{\Sigma'}:=(\Sigma')^{-1}$. Nach Voraussetzung(!) also $\vdash_n \Delta\bar{\Sigma'}, \Gamma \sqsupset B$ und damit nach Induktionsvoraussetzung(!!) $\vdash_n \underbrace{\Delta\bar{\Sigma'}\Sigma\Sigma'}_{\Delta}, \Gamma\Sigma\Sigma' \sqsupset B\Sigma\Sigma'$. Also folgt mit der ($\Omega_{k+1}$)-Regel die Behauptung.

Damit können wir zunächst mal den allerobersten zweitstufigen Quantor beseitigen.

Lemma.

$$\vdash_n \Gamma \sqsupset \forall\mathfrak{X}_n A(\mathfrak{X}_n) \text{ und } \Gamma \subset \mathrm{Neg}^2_n \quad \Rightarrow \quad \vdash_n \Gamma \sqsupset A(\mathcal{A}).$$

Beweis.

Induktion entlang $\vdash_n \Gamma \sqsupset \forall\mathfrak{X}_n A(\mathfrak{X}_n)$. Wegen $\Gamma \subset \mathrm{Neg}^2_n$ kann nicht $(d)_0 \leq 4$ sein. *Dies ist genau der entscheidende Punkt. Hier zeigt sich, daß unsere Motivation für die* Ω*-Regel richtig war!*

Fall $\forall\mathfrak{X}_n$-intro: Lemma oben.

Fall Ω_{k+1}-Regel. Nach Induktionsvoraussetzungen.

So, und jetzt fassen wir das alles mit der Ω-Regel zusammen, wie schon besprochen.

Corollary.

$$\vdash_n \Gamma \sqsupset \forall\mathfrak{X}_k A(\mathfrak{X}_k), \Gamma \subset \mathrm{Neg}_k \quad \Rightarrow \quad \vdash_n \Gamma \sqsupset A(\mathcal{A})$$

Und der Beweis ist auch ganz einfach...

Beweis.

Fall $k = n$. Lemma oben

Fall $k < n$. *NB: andere Fälle gibt es nicht, wegen der Restriktion der Sprache für die fraglichen Beweise.* Konstruiere Beweis mit der Ω_{k+1}-Regel. Wende obiges Lemma auf alle $d \vdash_k \Delta \sqsupset \forall\mathfrak{X}_k.A(\mathfrak{X}_k)$ an.