Kleene-Indices und die Arithmetische Hierarchie

Klaus Aehlig

24.5., 26.5. und 31.5.2006

1 Ein Σ^0_1-vollständiges System der Arithmetik

Vorbemerkung. Das in diesem Abschnitt behandelte System Q entspricht im wesentlichem dem Sytem Σ aus früheren Kapiteln der Vorlesung. Auch sind einige Resultate dieses Abschnitts (insbesondere Proposition 1.5, Korollar 1.7, Lemma 1.14) bereits früher bewiesen worden. Um jedoch eine möglichst in sich geschlossene Darstellung zu geben werden diese hier noch einmal wiederholt.

Motivation. Wir wollen Berechenbarkeit aus logischer Sicht studieren. Berechenbarkeit spricht aber von natürlichen Zahlen und arithmetischen Zusammenhängen. Wir benötigen also zunächst ein System, das genug Kenntnisse über die Arithmetik der natürlichen Zahlen hat.

Definition 1.1 (Robinsons Q). Robinons System Q ist eine Theorie über der Sprache $\mathcal{L} = \{0, \mathcal{S}, +, \cdot\}$ gegeben durch die Axiome

$$\begin{array}{ll}
x = 0 \vee \exists y. x = \mathcal{S}y & \\
\mathcal{S}x \neq 0 & \mathcal{S}x = \mathcal{S}y \rightarrow x = y \\
x + 0 = x & x + \mathcal{S}y = \mathcal{S}(x + y) \\
x \cdot 0 = 0 & x \cdot (\mathcal{S}y) = x \cdot y + x
\end{array}$$

sowie klassiche Logik.

Bemerkung 1.2. Zu Q gehöhren ferner die Gleichheitsaxiome. Da diese jedoch (in dieser Vorlesung) Teil der klassischen Logik sind muß dies nicht extra erwähnt werden.

Proposition 1.3. *Robinsons Q ist korrekt; genauer gilt*

$$\mathbb{N} \models Q$$

Notation 1.4. Für n eine natürliche Zahl schreiben wir neben z_n auch $\underline{n}$ für die Ziffer von n, also für $\underbrace{\mathcal{S} \ldots \mathcal{S}}_{n} 0$.

Proposition 1.5. *Seien $n > m$ natürliche Zahlen, so gilt*

$$Q \vdash \underline{n} \neq \underline{m}$$

Beweis. Induktion über m. Der Fall $m = 0$ ist ein Axiom. Sei also $m > 0$. Dann gilt

$$\begin{array}{ll} Q \vdash \underline{n-1} \neq \underline{m-1} & \text{nach IH} \\ Q \vdash \underline{n} = \underline{m} \to \underline{n-1} = \underline{m-1} & \text{nach 2. Axiom} \end{array}$$

woraus die Behauptung $Q \vdash \underline{n} \neq \underline{m}$ folgt. ∎

Bemerkung 1.6. Der Beweis von Proposition 1.5 ist ein Beispiel für "Metainduktion"; durch Induktion über m wird bewiesen daß es für jedes m einen Beweis gibt.

Man beachte, daß das System dazu nichts über Induktion wissen muß.

Korollar 1.7. $n \neq m \Rightarrow Q \vdash \underline{n} \neq \underline{m}$

Beweis. Aus Propositon 1.5 und der Symmetrie der Gleichheit. ∎

Proposition 1.8. $Q \vdash \underline{n} + \underline{m} = \underline{n+m}$

Beweis. Induktion über m. ∎

Proposition 1.9. $Q \vdash \underline{n} \cdot \underline{m} = \underline{nm}$

Beweis. Induktion über m. ∎

Korollar 1.10. *Ist t ein geschlossener $\mathcal{L}$-Term, so $Q \vdash t = \underline{t^{\mathbb{N}}}$.*

Beweis. Folgt aus Propositionen 1.8 und 1.9 durch Induktion über t. ∎

Lemma 1.11. *Seien s und t geschlossene $\mathcal{L}$-Terme, so gilt*

$$s^{\mathbb{N}} = t^{\mathbb{N}} \Rightarrow Q \vdash s = t$$

Beweis. Nach Korollar 1.10 gilt $Q \vdash s = \underline{s^{\mathbb{N}}}$ und $Q \vdash t = \underline{t^{\mathbb{N}}}$. Wegen $s^{\mathbb{N}} = t^{\mathbb{N}}$ sind $\underline{s^{\mathbb{N}}}$ und $\underline{t^{\mathbb{N}}}$ die gleichen Terme, also folgt die Behauptung aus den Gleichheitsaxiomen. ∎

Lemma 1.12. *Seien s und t geschlossene $\mathcal{L}$-Terme, so gilt*

$$s^{\mathbb{N}} \neq t^{\mathbb{N}} \Rightarrow Q \vdash s \neq t$$

Beweis. Nach Korollar 1.10 gilt $Q \vdash s = \underline{s^{\mathbb{N}}}$ und $Q \vdash t = \underline{t^{\mathbb{N}}}$. Wegen $s^{\mathbb{N}} \neq t^{\mathbb{N}}$ folgt die Behauptung aus Korollar 1.7 und den Gleichheitsaxiomen. ∎

Definition 1.13. Wir schreiben $s \leq t$ für $\exists y.s + y = t$.

Lemma 1.14. *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $Q \vdash x \leq \underline{n} \to x = \underline{0} \vee x = \underline{1} \vee \ldots \vee x = \underline{n}$.*

Beweis. Induktion nach n. Für $n = 0$ ist zu zeigen $Q \vdash x \leq \underline{0} \to x = \underline{0}$, also, nach auflösen der Abkürzungen $Q \vdash \exists y.x + y = 0 \to x = 0$. Argumentiere in Q.

> Falls $y = 0$ gilt die Behauptung unmittelbar. Sei also $y \neq 0$. Dann $y = \mathcal{S}y'$ für ein y'. Dann aber $0 = x + y = x + \mathcal{S}y' = \mathcal{S}(x + y')$. Absurd.

Sei $n > 0$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt bereits $Q \vdash x \leq \underline{n-1} \to x = \underline{0} \vee \ldots \vee x = \underline{n-1}$. Argumentiere wieder in Q.

> Sei y mit $x + y = \underline{n}$. Falls $y = 0$ gilt die Behauptung sofort. Sei also $y \neq 0$. Dann gibt es y' mit $y = \mathcal{S}y'$. Also $\mathcal{S}\underline{n-1} = x+y = x+\mathcal{S}y' = \mathcal{S}(x + y')$. Also $\underline{n-1} = x + y'$, mit anderen Worten $x \leq n - 1$.

Mit der Induktionsvoraussetzung folgt die Behauptung. □

Notation 1.15. Wir schreiben $\forall x \leq t.A$ als Abkürzung für $\forall x(x \leq t \to A)$ und sprechen von einem "beschränkten Allquantor".

Definition 1.16 (Σ-Formeln). Die Menge der Σ-Formeln ist die kleinste Menge von Formeln, die

- die atomaren Formeln (samt ihrer Negationen) enthält, also Formeln der Form $s = t$ und $s \neq t$ für Terme s und t,
- abgeschlossen ist unter Konjuntion $A \wedge B$, Disjunktion $A \vee B$
- beschränkter Allquantifikation $\forall x \leq t.A$, und
- unbeschränkter Existenzquantifikation $\exists x.A$.

Theorem 1.17. *Sei φ eine Σ-Formel mit höchstens den freien Variablen $v_1, \ldots, v_n$ und η Belegung mit $\mathbb{N} \models \varphi[\eta]$. Es sei $\eta(v_1) = a_1, \ldots, \eta(v_n) = a_n$. Dann $Q \vdash \varphi_{v_1,\ldots,v_n}(\underline{a_1}, \ldots, \underline{a_n})$.*

Beweis. Wir bezeichnen mit σ_η die Substitution $[\underline{\eta(x_1)}, \ldots, \underline{\eta(x_n)}/v_1, \ldots, v_n]$.

Induktion über φ. Die atomaren Formeln werden von Lemmata 1.11 und 1.12 behandelt.

Im Fall $\varphi \equiv A \wedge B$ gilt $\mathbb{N} \models (A \wedge B)[\eta]$, also $\mathbb{N} \models A[\eta]$ und $\mathbb{N} \models B[\eta]$. Nach Induktionsvoraussetzung also $Q \vdash A\sigma_\eta$ und $Q \vdash B\sigma_\eta$.

Im Fall $\varphi \equiv \forall x \leq t.A$ ist $t\sigma_\eta$ geschlossen. Nach Korollar 1.10 erhalten wir also $Q \vdash t\sigma_\eta = \underline{(t\sigma_\eta)^{\mathbb{N}}}$ und wegen $(t\sigma_\eta)^{\mathbb{N}} = t^{\mathbb{N}}[\eta]$ auch $Q \vdash t\sigma_\eta = \underline{(t^{\mathbb{N}}[\eta])}$. Nach Lemma 1.14 ferner $Q \vdash x < t\sigma_\eta \to x = \underline{0} \vee \ldots \vee x = \underline{t^{\mathbb{N}}[\eta]}$. Also genügt es zu zeigen, daß für $k \leq t^{\mathbb{N}}[\eta]$ gilt $Q \vdash x = \underline{k} \to A\sigma_\eta$. Aber aus der Gleichheitslogik folgt $Q \vdash x = \underline{k} \to (A\sigma_\eta \leftrightarrow A\sigma_\eta[\underline{k}/x])$. Ferner gilt $A\sigma_\eta[\underline{k}/x] \equiv A\sigma_{\eta_x^k}$. Außerdem folgt aus $\mathbb{N} \models (\forall x \leq t.A)[\eta]$, daß $\mathbb{N} \models A[\eta_x^k]$, so daß wir nach Induktionsvoraussetzung fertig sind.

Im Fall $\varphi \equiv A_0 \vee A_1$ folgt aus $\mathbb{N} \models (A_0 \vee A_1)[\eta]$, daß $\mathbb{N} \models A_i[\eta]$ für ein $i \in \{0, 1\}$ gilt. Dann aber $Q \vdash A_i\sigma_\eta$ nach Induktionsvoraussetzung.

Im Fall $\varphi \equiv \exists x.A$ folgt aus $\mathbb{N} \models (\exists x.A)[\eta]$ daß $\mathbb{N} \models A[\eta_x^k]$ für ein k gelten muß. Nach Induktionsvoraussetzung gilt also $Q \vdash A\sigma_{\eta_x^k}$, also $Q \vdash (\exists x.A)\sigma_\eta$ mit $\underline{k}$ als Zeugen für die Existenz-Einführung. □

Bemerkung 1.18. Theorem 1.17 ist in gewisser Weise optimal. Nach dem Gödelschen Unvollständigkeitssatz kann Q seine eigene Konsistenz nicht beweisen. Die Aussage $\mathrm{Con}(Q)$ ist aber eine reine Allaussage.

2 Σ-definierbare Funktionen und Kleene-Indices

Notationelle Vorbemerkung. Im folgenden werden wir von der bisherigen Konvention der Vorlesung Abstand nehmen, gebundene Variablen mit x_i und freie Variablen mit v_i zu bezeichnen. Statt dessen gehen wir davon aus, daß $x_0, x_1, x_2, \ldots$ eine fest vorgegebene Aufzählung aller Variablen ist.

Motivation. In Theorem 1.17 haben wir gesehen, daß bereits das recht einfache System Q genügt um alle wahren Σ-Aussagen über $\mathbb{N}$ zu beweisen. Dies motiviert ein Model von "Berechenbarkeit", das unmittelbar mit der Logik in Zusammenhang steht. Wir werden Funktionen als berechenbar ansehen, wenn ihr Graph durch eine Σ-Formel definierbar ist.

Die damit verbundene Vorstellung von "Berechnen" erscheint zunächst etwas absurd: um zu bestimmen, was $f(n)$ ist, zählen wir der Reihe nach alle Zeichenreihen auf, überprüfen, ob sie Beweise in Robinsons Q sind und wenn ja, ob die bewiesene Formel von der Bauart $f(n) = m$ ist. Wenn ja haben wir das gesuchte m gefunden. Trotzdem werden wir sehen, daß dieser Begriff von Berechenbar genau so mächtig ist, wie alle anderen Begriffe von Berechenbarkeit, die wir kennen gelernt haben; daß Σ-definierbarkeit im intuitiven Sinne berechenbar ist, haben wir gerade argumentiert.

Definition 2.1. Seien A und B Mengen. Eine *partielle* Funktion $f\colon A \rightharpoonup B$ ist eine Funktion $f\colon A' \to B$ für ein $A' \subset A$. Dabei heißt A' der Definitionsbereich von f.

Anschaulich gesprochen sind also partielle Funktionen von A nach B, gerade "Funktionen, nicht auf ganz A definiert sein müssen".

Definition 2.2. Eine partielle Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{N}$ heißt Σ-definierbar, falls es eine Σ-Formel φ gibt, mit freien Variablen unter $x_0, x_1, \ldots, x_k$, für die gilt

$$f(n_1, \ldots, n_k) = m \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbb{N} \models \varphi[\underline{m}, \underline{n_1}, \ldots, \underline{n_l}/x_0, x_1, \ldots, x_k]$$

Eine Menge $W \subset \mathbb{N}^k$ heißt Σ-definierbar, falls es eine Σ-Formel φ gibt, mit freien Variablen unter $x_1, \ldots, x_k$, für die gilt

$$(n_1, \ldots, n_k) \in W \Leftrightarrow \qquad \mathbb{N} \models \varphi[\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_l}/x_1, \ldots, x_k]$$

Wir bezeichnen die Menge aller Σ-definierbaren Funktionen mit $\mathcal{F}_\Sigma$.

Lemma 2.3. *Ist $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ eine Σ-definierbare (totale) Funktion, so sind ihr Graph*

$$G_f = \{(y, x_1, \ldots, x_k) | f(x_1, \ldots, x_k) = y\}$$

und sein Komplement

$$\{(y, x_1, \ldots, x_k) | f(x_1, \ldots, x_k) \neq y\}$$

beides Σ-definierbare Mengen.

Beweis. $f(x_1,\ldots,x_k) \neq y \Leftrightarrow \exists z.z \neq y \wedge f(x_1,\ldots,x_k) = z$. □

Lemma 2.4. *Jede Σ-definierbare Menge ist Definitionsbereich einer Σ-definierbaren partiellen Funktion.*

Beweis. Sei W definiert durch $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$. Dann ist $W = \mathrm{dom}(f)$, wobei $f\colon \mathbb{N}^n \rightharpoonup \mathbb{N}$ definiert ist durch $\varphi(x_1,\ldots,x_n) \wedge x_0 = 0$. □

Wir bemerken sofort, daß $\mathcal{F}_\Sigma$ gute Abschlußeigenschaften hat.

Proposition 2.5. *$\mathcal{F}_\Sigma$ enthält alle konstanten Funktionen, die Nachfolgerfunktion und die Projektionen.*

Beweis. Die gesuchten Definitionen sind $x_0 = \underline{c}$, $x_0 = \mathcal{S}x_1$ und $x_0 = x_i$. □

Lemma 2.6. *$\mathcal{F}_\Sigma$ ist abgeschlossen unter Komposition und unbeschränktem μ-Operator.*

Beweis.

$$\begin{array}{ll} f(g_1(n_1,\ldots,n_k),\ldots,g_\ell(n_1,\ldots,n_k)) = m & \\ \quad\Leftrightarrow \quad \exists m_1,\ldots,m_\ell.(& g_1(n_1,\ldots,n_k) = m_1 \wedge \ldots \wedge g_\ell(n_1,\ldots,n_k) = m_\ell \\ & \wedge f(m_1,\ldots,m_\ell) = m) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mu_y(f(n_1,\ldots,n_k,y)) = m \\ \quad\Leftrightarrow \quad f(n_1,\ldots,n_k,m) = 0 \wedge \forall y < m.f(n_1,\ldots,n_k,y) \neq 0 \end{array}$$

Für die Σ-Definierbarkeit von $f(n_1,\ldots,n_k,y) \neq 0$ verwenden wir Lemma 2.3. □

Als nächstes wollen wir zeigen, daß $\mathcal{F}_\Sigma$ auch unter primitiver Rekursion abgeschlossen ist. Die Idee ist, daß wir sagen "es gibt eine Liste von Zwischenergebnissen…"; dazu überlege wir uns zunächst, daß eine Codierung von Listen gibt, die leicht *abzulesen(!)* ist.

Lemma 2.7 (Gödel'sche β-Funktion). *Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jede Folge $n_0,\ldots,n_k$ natürlicher Zahlen gibt es natürliche Zahlen a und b so daß für $i = 0,\ldots,k$ gilt*

$$n_i = a \bmod (1+i)\cdot b + 1\,.$$

Beweis. Sei $s = \max\{k, n_0,\ldots,n_k\}$ und setzte $b = s!$. Nach dem Chinesischen Restsatz genügt es zu zeigen, daß die Zahlen $b_i = 1 + (1+i)b$ paarweise relativ prim sind, denn offenbar gilt $n_i \leq s \leq s! \leq b < b_i$.

Angenommen p prim teile b_i und b_j für $i < j$. Dann auch $p | b_j - b_i = 1 + (1+i)b - (1 + (1+j)b) = (j-i)b = (j-i)s!$. Da $j - i \leq j \leq k \leq s$ und also $(j-i)|s!$ gilt also $p|s! = b$. Da wir $p|b_i = 1 + (1+i)b$ angenommen haben folgt daraus $p|1$. Absurd. □

Bemerkung 2.8. Lemma 2.7 zeigt, daß die Existenz einer Liste durch eine Σ-Formel ausgedrückt werden kann, in dem wir nämlich sagen "$\exists k \exists a \exists b \ldots$". Man beachte, daß $n_i = a \bmod (i+1) \cdot b$ geschrieben werden kann als

$$\exists m.(a = b \cdot m + n_i \wedge n_i < b)\,.$$

Lemma 2.9. *$\mathcal{F}_\Sigma$ ist abgeschlossen unter primitiver Rekursion.*

Beweis. Sei $f\colon \mathbb{N}^{k+1} \rightharpoonup \mathbb{N}$ definiert durch

$$\begin{array}{lcl} f(\vec{x},0) & = & g(\vec{x}) \\ f(\vec{x},n+1) & = & h(\vec{x},k,f(\vec{x},k)) \end{array}$$

so gilt

$$\begin{array}{ll} f(\vec{x},n) = m & \Leftrightarrow \\ \multicolumn{2}{l}{\exists \ell_0 \ldots \ell_n.(\ell_0 = g(\vec{x}) \wedge \forall i < n(\ell_{i+1} = h(\vec{x},i,\ell_i)) \wedge m = \ell_i)} \end{array}$$

woraus nach Lemma 2.7 die Behauptung folgt. □

Korollar 2.10. *$\mathcal{F}_\Sigma$ enthält alle μ-rekursiven Funktionen.*

Beweis. Unmittelbar aus Proposition 2.5 und Lemmata 2.6 und 2.9. □

Für die Umkehrung verwenden wir zwei aus der Vorlesung bereits bekannte Hilfsmittel. Zum einen Beweisprädikate, genauer

> Für jede endlich axiomatisierbare Theorie gibt es ein primitiv rekursives Prädikat $\mathrm{Proof}_T(d, \ulcorner A \urcorner)$, das genau dann gilt, wenn d der Code eines Beweises von A in T ist.
>
> Dabei ist $\ulcorner \ldots \urcorner$ eine geeignete Gödel-Kodierung von Formeln, bei der Zusammensetzen von Formeln und Ablesen der Teilformeln primitiv rekursiv sind; insbesondere sind dann auch "quasi-quotes" $\ulcorner \ldots \dot{e} \ldots \urcorner$ primitv rekursiv.

Ferner verwenden wir eine geeignete Paarfunktion. In der Vorlesung wurde bereits das folgende gezeigt.

> Die Funktion $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x,y) \mapsto y + \sum_{i=1}^{x+y} i$ ist primitiv rekursiv und bijektiv. Ihre Umkehrfuntionen werden mit $\mathrm{p}_0(\cdot)$ und $\mathrm{p}_1(\cdot)$ bezeichnet.

Eine andere geeignete primitiv rekursive Paarfunktion wäre $(x,y) \mapsto 2^x(2y+1)$.

Theorem 2.11 (Kleene's T-Prädikat). *Jede Σ-definierbare partielle Funktion ist μ-rekursiv. Genauer gibt es ein primitiv rekursives Prädikat T^k und eine primitiv rekursive Funktion U so daß es für jede Σ-definierbare partielle Funktion $f : \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl e gibt mit*

$$f(n_1,\ldots,n_k) = U(\mu z.T^k(e,n_1,\ldots,n_k,z))$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei f eine Σ-definierbare partielle Funktion. Dann gibt es eine Σ-Formel φ, die f definiert, also

$$f(n) = m \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbb{N} \models \varphi[\underline{m}, \underline{n_1}, \ldots, \underline{n_l}/x_0, x_1, \ldots, x_k]$$

was wir auch als $\mathbb{N} \models \psi$ schreiben können mit $\psi \equiv \exists x_0 \exists x_1 \ldots \exists x_k .. x_1 = \underline{n_1} \wedge \ldots \wedge x_n = \underline{n_k} \wedge \varphi \wedge x_0 = \underline{m}$. Wegen der Σ-Vollständigkeit von Robinson's Q (Theorem 1.17) ist dies genau dann der Fall, wenn $Q \vdash \psi$. Die Existenz eines Beweises kann mit dem Beweisprädikat ausgedrückt werden als $\exists d.\mathrm{Proof}_Q(d, \ulcorner\psi\urcorner)$.

Die folgende Setzung liefert also das gewünschte.

$$\begin{aligned} T^k(e, n_1, \ldots, n_k, z) &= \mathrm{Proof}_Q(\mathrm{p}_1(z), \ulcorner \exists x_0 x_1 \ldots x_n.\ (x_1 = \underline{n_1} \wedge \ldots \wedge x_n = \underline{n_k} \\ &\qquad \wedge \dot{e} \wedge x_0 = \underline{\mathrm{p}_0(z)})\urcorner) \\ U(z) &= \mathrm{p}_0(z) \\ e &= \ulcorner\varphi\urcorner \end{aligned}$$

□

Definition 2.12. Im folgenden seien T^k und U wie *im Beweis* von Theorem 2.11.

Korollar 2.13. *Die Σ-definierbaren (partiellen) Funktionen sind genau die μ-rekursiven (partiellen) Funktionen.*

Beweis. Korollar 2.10 und Theorem 2.11. □

Korollar 2.14 (Kleene's Normalform-Theorem). *Jede μ rekursive partielle Funktion läßt sich durch einen einzigen μ-Operator definieren. Genauer gibt es für jedes μ-rekursive $f\colon \mathbb{N}^k \rightharpoonup \mathbb{N}$ ein e mit*

$$f(n_1, \ldots, n_k) = U(\mu z.T^k(e, n_1, \ldots, n_k, z))\,.$$

Beweis. Nach Korollar 2.10 ist f eine Σ-definierbare Funktion. Also folgt die Behauptung nach Theorem 2.11. □

Damit haben wir also einen bequemen Weg gefunden, rekursive Funktionen als natürliche Zahlen dazustellen. Dies motiviert die folgende Defintion.

Definition 2.15. Wir setzen $\{e\}^k(n_1, \ldots, n_k) = U(\mu z.T^k(e, n_1, \ldots, n_k, z))$.

Notation 2.16. Wir schreiben auch $\{e\}(n)$ statt $\{e\}^1(n)$.

Beispiel 2.17.

$$\begin{aligned} \left\{\ulcorner x_0 = 2x_1\urcorner\right\}(4) &= 8 \\ \left\{\ulcorner x_1 = 2x_0\urcorner\right\}(4) &= 2 \\ \left\{\ulcorner x_1 = 2x_0\urcorner\right\}(5) &= \text{undefiniert} \end{aligned}$$

Bemerkung 2.18. Es gibt primitiv rekursive Funktionen comp, mu und pr die Komposition, unbeschränkten μ-Operator und primitive Rekursion auf den Indices vermitteln.

Beweis. Die in Lemmata 2.6 und 2.9 vorgenommen Operationen auf den Formeln sind offensichtlich primitiv rekursiv. ◻

Proposition 2.19 (s-n-m Theorem). *Es gibt primitiv rekursive Funktionen s_n^m mit*

$$\{e\}^{m+n}(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) = \{s_n^m(e, b_1, \ldots, b_m)\}^n (a_1, \ldots, a_n)$$

Beweis. Die Funktion

$$s_n^m(e, b_1, \ldots, b_m) = \ulcorner \exists x_{n+1} \ldots \exists x_{n+m}(\dot{e} \wedge x_{n+1} = \underline{b_1} \wedge \ldots \wedge x_{n+m} = \underline{b_m})\urcorner$$

ist wie gewünscht. ◻

Lemma 2.20 (Rekursionssatz). *Zu jedem rekursiven $g\colon \mathbb{N}^{n+1} \rightharpoonup \mathbb{N}$ gibt es ein e mit $\{e\}^n(a_1, \ldots, a_n) = g(e, a_1, \ldots, a_n)$.*

Beweis. Die Zuordnung $(a_1, \ldots, a_n, e) \mapsto g(s_n^1(e, e), a_1, \ldots, a_n)$ ist rekursiv, also gibt es nach Korollar 2.14 eine Zahl k mit

$$\{k\}^{n+1}(a_1, \ldots, a_n, e) = g(s_n^1(e, e), a_1, \ldots, a_n)\,.$$

Dann ist aber

$$\left\{s_n^1(k, k)\right\}^n (a_1, \ldots, a_n) = \{k\}^{n+1}(a_1, \ldots, a_n, k) = g(s_n^1(k, k), a_1, \ldots, a_n)$$

und $s_n^1(k, k)$ ein möglicher Index. ◻

Bemerkung 2.21. Der Rekursionssatz besagt, daß wir rekursive Funktionen auch dadurch definieren können, daß wir in der Definition auf die zu definierende Funktion selbst zurückgreifen, sie also "rekursiv aufrufen".

Proposition 2.22 (Universeller Kleene-Index). *Es gibt eine natürliche Zahl e_U, so daß für alle μ-rekursiven Funktionen f eine Zahl e gibt so daß für alle n gilt*

$$f(n) = \{e_U\}^2(e, n)\ .$$

Beweis. Die Zuordnung $(e, n) \mapsto U(\mu z.T(e, n, z))$ ist μ-Rekursiv. Nach Korollar 2.14 gibt es also ein e_U mit $\{e_U\}^2(e, n) = U(\mu z.T(e, n, z))$ und erneute Anwendung von Korollar 2.14 liefert die Behauptung. ◻

Theorem 2.23 (Universelle Σ-Formeln). *Es gibt Σ-Formeln $\varphi^k(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})$, so daß es für alle Σ-Formeln $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ mit freien Variaben unter $x_1, \ldots, x_k$ eine natürliche Zahl e_ψ gibt für die gilt*

$$\mathbb{N} \models (\varphi^k(x_1, \ldots, x_k, \underline{e_\psi}) \leftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_k))\,.$$

Beweis. Sei $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ eine Σ-Formel. Nach der Σ-Vollständigkeit von Robinsons Q ist für alle $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$

$$\psi(n_1, \ldots, n_k) \;\Leftrightarrow\; Q \vdash \psi(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k})$$

was wiederum geschrieben werden kann als

$$\psi(n_1, \ldots, n_k) \;\Leftrightarrow\; \exists d. \mathrm{Proof}_Q(d, \ulcorner \psi(\underline{n_1}, \ldots, \underline{n_k})\urcorner)$$

beziehungsweise

$$\psi(n_1, \ldots, n_k) \;\Leftrightarrow\; \exists d. \mathrm{Proof}_Q(d, \ulcorner \exists x_1 \ldots \exists x_n(\psi(x_1, \ldots, x_k) \wedge x_1 = \underline{n_1} \wedge \ldots \wedge x_k = \underline{n_k})\urcorner)\,.$$

Nun ist aber die Funktion

$$(x_1, \ldots, x_n, e, d) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathrm{Proof}_Q(d, \ulcorner \exists n_1 \ldots \exists n_k(\dot{e} \wedge x_1 = \underline{n_1} \wedge \ldots \wedge x_k = \underline{n_k})\urcorner) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

primitiv rekursiv, also insbesondere μ-rekursiv, also gibt es nach Korollar 2.10 eine Σ-Formel $\tilde{\varphi}^k(x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2})$ die sie definiert. Setze nun $\varphi^k \equiv \exists x_{k+2}. \tilde{\varphi}^k(x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2})$ und $e_\psi = \ulcorner \psi \urcorner$. ∎

3 Der Turing-Jump und der Anfang der Arithmetische Hierarchie

Motivation. Wir haben gesehen, daß uns die Σ-vollständigkeit von Q gute Möglichkeiten gibt, Berechenbarkeit zu beschreiben. Allerdings zeigt uns der Unvollständigkeitssatz, daß wir nicht hoffen können, dies auf Allformeln, oder gar noch komplizierte Formeln zu erweitern.

Wir müssen uns also die Basistheorie erweitern, um weiter zu kommen. Wir müssen also "von außen" neues Wissen einbringen; dies führt zu dem Konzept "relativer Berechenbarkeit".

Definition 3.1. $W_e^k{:=}\mathrm{dom}(\{e\}^k)$ sei der Definitionsbereich der Σ-definierbaren partiellen Funktion mit Code e.

Wir schreiben W_e für W_e^1.

Bemerkung 3.2. $W_e^k{:=}\{(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k \mid \exists y. T(e, n_1, \ldots, n_k, y)\}$

Definition 3.3. Ist $W \subset \mathbb{N}$ so bezeichnen wir ihre characteristische Funktion mit χ_W. Mit anderen Worten

$$\chi_W(n) = \begin{cases} 1 & n \in W \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Theorem 3.4 (Unentscheidbarkeit des Halteproblems). *$K{:=}\{e \in \mathbb{N} \mid e \in W_e\}$ ist Σ-definierbar, aber ihre characteristische Funktion χ_K nicht.*

Beweis. Es ist $\mathcal{K} = \{e \mid \exists y.T(e,e,y)\}$.

Angenommen $\chi_{\mathcal{K}}$ ist Σ-definierbar, dann auch die Menge $\mathcal{D} = \{n \mid \chi_{\mathcal{K}}(n) = 0\}$. Sei e_0 ein Index für $\mathcal{D}$, gemäß Lemma 2.4 und Theorem 2.11. Dann gilt

$$e_0 \in \underbrace{W_{e_0}}_{\mathcal{D}} \Leftrightarrow \chi_{\mathcal{K}}(e_0) = 0 \Leftrightarrow e_0 \notin W_{e_0}$$

was absurd ist. □

Die naheliegende Erweiterung ist nun, der Berechnung die Information $\chi_{\mathcal{K}}$ als Parameter mitzugeben. Wie aber stellen wir eine Funktion zur Verfügung? Unsere Modell von Berechenbarkeit ist es ja, Beweise aufzuzählen und Beweise sind ja endliche Objekte, also genügt es, ausreichend Große, endliche(!), Teile der Funktion zu kennen. Dies motiviert das Folgende.

Definition 3.5. Ist $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion, so ist

$$\bar{\alpha}(n) = \langle \alpha(0), \ldots, \alpha(n-1) \rangle \in \mathbb{N}$$

bezüglich einer fest gewählten, primitiv rekursiven Codierung von Folgen. Beispielsweise $2^n 3^a 5^b$ mit den Werten a und b aus der Gödelschen β-Funktion (Lemma 2.7).

Definition 3.6 (T-Prädikate für relative Berechenbarkeit). Wir setzen

$$T^{m,n}(e, \vec{\alpha}, \vec{a}, z) = T^{m+n}(e, \bar{\alpha}_1(\mathrm{p}_0(z)), \ldots, \bar{\alpha}_m(\mathrm{p}_0(z)), a_1, \ldots, a_n, \mathrm{p}_1(z))$$

und

$$\{e\}^{m,n}(\vec{\alpha}, \vec{a}) = U(\mathrm{p}_1(\mu z.T^{m+n}(e, \vec{\alpha}, \vec{a}, z)))\,,$$

sowie

$$W_e^{m,n} = \{\mathrm{dom}(\{e\}^{m,n})\} \subset ({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N})^m \times \mathbb{N}^n\,.$$

Definition 3.7 (Jump-Operator, Jump-Hierarchy). Für $A \subset \mathbb{N}$ sei

$$j(A) = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists z.T^{1,1}(x, \chi_A, x, z)\}\,.$$

Ferner setzen wir für eine Menge A

$$\begin{array}{lcl} A^{(0)} & = & A \\ A^{(n+1)} & = & j(A^{(n)}) \end{array}$$

Definition 3.8 (Relative Σ-Definierbarkeit). Für $A \subset \mathbb{N}$ sei

$$\Sigma(A) = \{\{n \mid (\chi_A, n) \in W_e^{1,1}\} \mid e \in \mathbb{N}\}$$

die Menge der relativ zu A rekursiv aufzählbaren Mengen.

Lemma 3.9. *Für $A \subset \mathbb{N}$ ist $\Sigma(A)$ gerade die Menge der Prädikate, die Σ-definierbar sind über der Struktur $\langle \mathbb{N}, 0, \mathcal{S}, +, \cdot, A\rangle$.*

Beweis. Es gilt

$$
\begin{aligned}
&\{n \mid (\chi_A, n) \in W_e^{1,1}\} = \\
&\{n \mid \exists z. T^{1,1}(e, \chi_A, n, z)\} = \\
&\{n \mid \exists z. T^2(e, \bar{\chi}_A(\mathrm{p}_0(z)), n, \mathrm{p}_1(z))\} = \\
&\{n \mid \exists yz. T^2(e, \bar{\chi}_A(y), n, z)\} = \\
&\{n \mid \exists y \exists z. T^2(e, \bar{\chi}_A(y), n, z)\} = \\
&\{n \mid \exists y \exists \ell_0 \ldots \ell_{y-1} \exists \ell \exists z. \\
&\qquad \forall i < y((\ell_i = 1 \land i \in A) \lor (\ell_i = 0 \land i \notin A)) \land \ell = \langle \ell_0, \ldots, \ell_{y-1} \rangle \land T^2(e, \ell, n, z)\}
\end{aligned}
$$

wobei das $\exists \ell_0 \ldots \exists \ell_{y-1}$ im Sinne der Gödelschen β-Funktion zu verstehen ist.

Sei andererseits $\varphi(x_1)$ eine Σ-Formel über der Sprache $\mathcal{L} \cup \{A\}$, also (vergleiche Definition 1.16) gebildet aus $s = t$, $s \neq t$, $s \in A$ und $s \notin A$ durch Konjunktion, Disjunktion, beschränkte Allquantifikation und unbeschränkte Existenzquantifikation. Dann kann die Wahrheitsdefinition von $\langle \mathbb{N}, 0, \mathcal{S}, +, \cdot, A \rangle \models \varphi(\underline{n})$ nur von endlichen vielen Stellen des Prädikats A abhängen. Sei φ^* die Formel φ, wobei alle Vorkommen von $i \in A$ durch $i < y \land l_i = 1$ sowie alle Vorkommen von $i \notin A$ durch $i < y \land l_i = 0$ erstetzt sind; auf Grund der Überlegung eben gilt also

$$\langle \mathbb{N}, 0, \mathcal{S}, +, \cdot, A \rangle \models \varphi(\underline{n}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\langle \mathbb{N}, 0, \mathcal{S}, +, \cdot, A \rangle \models \exists y \exists \ell_0 \ldots \ell_{y-1}. \forall i < y((\ell_i = 1 \land i \in A) \lor (\ell_i = 0 \land i \notin A)) \land \varphi^*(\underline{n}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists y \exists \ell_0 \ldots \ell_{y-1}. (\forall i < y. \ell_i = \chi_A(i)) \land \langle \mathbb{N}, 0, \mathcal{S}, +, \cdot, A \rangle \models \ell = \underline{\langle \ell_0, \ldots, \ell_{y-1} \rangle} \land \exists y. y = \mathrm{length}(\ell) \land \varphi^*(\underline{n}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists y \exists \ell_0 \ldots \ell_{y-1}. (\forall i < y. \ell_i = \chi_A(i)) \land \langle \mathbb{N}, 0, \mathcal{S}, +, \cdot \rangle \models \ell = \underline{\langle \ell_0, \ldots, \ell_{y-1} \rangle} \land \exists y. y = \mathrm{length}(\ell) \land \varphi^*(\underline{n}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists y \exists \ell_0 \ldots \ell_{y-1}. (\forall i < y. \ell_i = \chi_A(i)) \land Q \vdash \ell = \underline{\langle \ell_0, \ldots, \ell_{y-1} \rangle} \land \exists y. y = \mathrm{length}(\ell) \land \varphi^*(\underline{n}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists y \exists \ell_0 \ldots \ell_{y-1}. (\forall i < y. \ell_i = \chi_A(i)) \land \exists d. T^2(\ulcorner \ell = x_1 \land \exists y. y = \mathrm{length}(\ell) \land \varphi^*(x_2) \urcorner, \langle \ell_0, \ldots, \ell_{y-1} \rangle, n, d) \quad \Leftrightarrow$$

$$\exists d. T^{1,1}(\ulcorner \ell = x_1 \land \exists y. y = \mathrm{length}(\ell) \land \varphi^*(x_2) \urcorner, \chi_A, n, d) \quad \Leftrightarrow$$

$$(\chi_A, n) \in W^{1,1}_{\ulcorner \ell = x_1 \land \exists y. y = \mathrm{length}(\ell) \land \varphi^*(x_2) \urcorner}$$

wobei $\ell_0, \ldots, \ell_{y-1}$ wieder im Sinne der Gödelschen β-Funktion zu verstehen ist. □

Lemma 3.10. *$j(A) \in \Sigma(A)$, aber $\overline{j(A)} = \{n \mid n \notin j(A)\} \notin \Sigma(A)$.*

Beweis. Einerseits gilt

$$
\begin{aligned}
j(A) = &\{x \in \mathbb{N} \mid \exists z. T^{1,1}(x, \chi_A, x, z)\} = \\
&\{x \mid \exists \ell \exists z. T^2(x, \bar{\chi}_A(\ell), x, z)\} = \\
&\{x \mid \exists \ell \exists z. T^2(e, \bar{\chi}_A(\ell), x, z)\} = \\
&\{x \mid \exists z. T^{1,1}(e, \chi_A(\ell), x, z)\} = \\
&\{x \mid (\chi_A, x) \in W_e^{1,1}\}
\end{aligned}
$$

wobei e ein Index für das rekursiv aufzählbare Prädikat $\exists z.T^2(x,a,x,z)$ von (x,a) ist.

Angenommen $\overline{j(A)} \in \Sigma(A)$, etwa

$$n \notin j(A) \Leftrightarrow (\chi_A, n) \in W_e^{1,1}.$$

Dann gilt

$$e \notin j(A) \quad \Leftrightarrow \quad (\chi_A, e) \in W_e^{1,1} \quad \Leftrightarrow \quad \exists z.T^{1,1}(e, \chi_A, e, z) \quad \Leftrightarrow \quad e \in j(A)$$

was absurd ist. ∎

Definition 3.11 (Σ_n-Formeln). Durch Induktion über n definieren wir für $n \geq 0$ die Menge der Σ_n-Formeln wie folgt.

Σ_0 ist die Menge der atomaren Formeln.

Σ_{n+1} für $n \geq q$ ist die kleinste Menge, die alle Σ_n Formeln und ihre negationen enthält und abgeschlossen ist unter Konjunktion, Disjunktion, beschränkter universeller und unbeschränkter existentieller Quantifikation.

Unter notationellem Mißbrauch bezeichenen wir mit Σ_n auch die Menge aller durch Σ_n-Formeln definierbaren Prädikate.

Theorem 3.12. *Für $n \geq 0$ gilt*

$$\Sigma_{n+1} = \Sigma(\emptyset^{(n)})$$

Beweis. Für die Inklusion "$\supset$" genügt es zu zeigen, daß $\emptyset^{(n)}$ definierbar ist durch eine Σ_n-Formel, was wir durch Induktion nach n zeigen. $x \in \emptyset$ kann als $1 = 0$ definiert werden. Sei also $\varphi^n(x)$ eine Σ_n-Formel, die $\emptyset^{(n)}$ definiert. Dann

$$\begin{array}{l}
x \in j(\emptyset^{(n)}) \quad \Leftrightarrow \\
\exists z.T^{1,1}(x, \chi_{\emptyset^{(n)}}, x, z) \quad \Leftrightarrow \\
\exists yz.T^2(x, \overline{\chi_{\emptyset^{(n)}}}(y), x, z) \quad \Leftrightarrow \\
\exists y\ell z \exists \ell_0 \dots \ell_{y-1}.\ell = \langle \ell_0, \dots, \ell_{y-1} \rangle \wedge \forall i < y((\ell_i = \chi_{\emptyset^{(n)}}(i))) \wedge T^2(x, \ell, x, z) \quad \Leftrightarrow \\
\exists y\ell z \exists \ell_0 \dots \ell_{y-1}.\ell = \langle \ell_0, \dots, \ell_{y-1} \rangle \wedge \forall i < y((\ell_i = 1) \wedge (\varphi^n(i))) \vee ((\ell_i = 0) \wedge (\neg\varphi^n(i)) \\
\qquad \wedge T^2(x, \ell, x, z)
\end{array}$$

Für die Inklusion "$\subset$" verwenden wir Lemma 3.9 und argumentieren durch Induktion nach n.

Sei φ eine Σ_{n+1}-Formel. Wir argumentieren durch Induktion nach dem Aufbau von φ; es genügt also zu zeigen, daß $\neg\psi$ mit Σ_n-Formel ψ durch eine durch eine Σ-Formel in $\emptyset^{(n)}$ ausgedrückt werden kann. Der Induktionsanfang $n = 0$ ist trivial, da die Negationen der atomaren Formeln wieder Σ-Formeln sind.

Nach Induktionsvoraussetzung ist $\psi \in \Sigma(\emptyset^{(n-1)})$, also gilt $\psi(k)$ genau dann wenn $(\chi_{\emptyset^{(n-1)}}, k) \in W_e^{1,1}$ für ein geeignetes e, also genau dann, wenn gilt $\exists y, z.T^2(e, \overline{\chi_{\emptyset^{(n-1)}}}(y), k, z)$. Da $\exists z.T^2(e, a, k, z)$ rekursiv ist, aufgefaßt als Relation von(!) (a, x, k), können wir einen Index e' wählen mit $\exists z' T^3(e', a, x, k, z') \Leftrightarrow \exists z.T^2(e, a, k, z)$. Ferner $\exists z' T^3(e', a, x, k, z') \Leftrightarrow \exists z' T^2(s_1^1(e', k), a, x, z')$. Damit also $\psi(k) \Leftrightarrow \exists y, z.T^2(e, \overline{\chi_{\emptyset^{(n-1)}}}(y), k, z) \Leftrightarrow \exists y, z.T^2(s_1^1(e', n), \overline{\chi_{\emptyset^{(n-1)}}}(y), x, z)$.

Da die letzte Aussage für alle x equivalent ist, können wir sie auch schreiben als $\exists y, z. T^2(s_1^1(e', n), \overline{\chi_{\emptyset^{(n-1)}}}(y), s_1^1(e', n), z)$ und damit als $s_1^1(e', n) \in j(\emptyset^{(n-1)}) = \emptyset^{(n)}$.

Es ist also $\neg\psi(n) \Leftrightarrow s_1^1(e', n) \notin \emptyset^{(n)}$. □

Korollar 3.13. *Für die Prädikatmengen gilt Σ_{n+1} und Σ_{n+2} sind echt ineinander enthalten.*

Beweis. Die Inklusion ergibt sich unmittelbar aus der Inklusion der entsprechenden Formelmengen.

Nach Lemma 3.10 ist $j(\emptyset^{(n)}) \in \Sigma(\emptyset^{(n)}) = \Sigma_{n+1}$, also $\overline{j(\emptyset^{(n)})} \in \Sigma_{n+2}$. Nach dem gleichen Lemma gilt jedoch $\overline{j(\emptyset^{(n)})} \notin \Sigma(\emptyset^{(n)}) = \Sigma_{n+1}$, was die Echtheit der Inklusion zeigt. □

Korollar 3.14 (Universelle Σ_{n+1}-Formeln). *Für jedes $n \geq 0$ gibt es eine Σ_{n+1}-Formel $\phi(e, x)$ so daß es für jede Σ_{n+1}-Formel ψ ein e_ψ gibt, so daß $\psi(x)$ und $\phi(e_\psi, x)$ für alle x equivalent sind.*

Beweis. Sei $\psi(x)$ eine Σ_{n+1}-Formel. Nach Theorem 3.12 gibt es ein e_ψ mit

$$\psi(x) \Leftrightarrow (\chi_{\emptyset^{(n)}}, x) \in W^{1,1}_{e_\psi} \Leftrightarrow \exists y \exists z T^2(e_\psi, \overline{\emptyset^{(n)}}(y), x, z)$$

Was sich als Σ_{n+1}-Formel in den Variablen e und x schreiben läßt, da $\emptyset^{(n)}$ ein Σ_n-definierbares Prädikat ist, wie wir im Beweis von Theorem 3.12 gesehen haben. □

Abschlußbetrachtungen. Wir haben gesehen, daß Definierbarkeitsfragen, selbst bezüglich einer so einfachen Theorie wie Robinsons Q nicht trivial sind. Außerdem haben wir mit dem Begriff der Berechenbarkeit eine Möglichkeit gefunden, die Formeln wieder zu entdecken — allerdings trägt der Berechenbarkeitsbegriff weiter. Wir können nämlich die Menge

$$\emptyset^{(\omega)} = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathrm{p}_0(n) \in \emptyset^{(\mathrm{p}_1(n))}\}$$

betrachten…