LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Sommersemester 2010
19. 7. 2010

Lineare Algebra II

Klausur

Nachname: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Studiengang: ❏ Bachelor ❏ Diplom ❏ Lehramt

❏ Andere: ______________________________

Studienfach: ❏ Mathematik ❏ Physik ❏ Informatik

❏ Andere: ______________________________

Bitte schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und legen Sie Ihren Lichtbild- und Studienausweis sichtbar vor sich auf den Tisch. Lösen Sie jede Aufgabe auf dem dafür vorgesehenen Blatt und schreiben Sie **auf jedes Blatt** in Blockschrift Ihren **Nachnamen und Vornamen**. Verwenden Sie **nicht** die Farben **rot oder grün**. Falls der Platz nicht ausreicht, benutzen Sie bitte die leeren Seiten auf den letzten Blättern und vermerken Sie dies auf dem Angabenblatt mit der entsprechenden Aufgabe. Achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben, und streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll. Prüfen Sie nach, dass Sie alle **5 Aufgaben** erhalten haben.

Falls Sie einen Übungsschein benötigen (nicht für Bachelor-Studenten), füllen Sie bitte auch das Formular auf der zweiten Seite aus.

Durch die Angabe eines geheimen Pseudonyms im Kästchen unten links (z. B. die letzten vier Ziffern Ihrer Matrikelnummer) willigen Sie ein, dass Ihr Klausurergebnis anonymisiert auf der Vorlesungshomepage veröffentlicht wird. Anstatt Ihres Namens wird nur Ihr persönliches Pseudonym veröffentlicht und somit der Datenschutz gewährleistet.

Sie haben **120 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

Pseudonym	1	2	3	4	5	$\sum$

Dieser Leistungsnachweis entspricht auch den Anforderungen

nach §	Abs.	Nr.	Buchstabe	LPO I
nach §	Abs.	Nr.	Buchstabe	LPO I

UNIVERSITÄT MÜNCHEN

ZEUGNIS

Der / Die Studierende der ______________________________

Herr / Frau ____________________ *aus* ____________________

geboren am ________ *in* ________________ *hat im* ________*–Halbjahr* ________

meine Seminar-Übungen ______________________________

____

mit __________________________________ *besucht.*

Er / Sie hat __________________________________

schriftliche Arbeiten geliefert, die mit ihm / ihr besprochen wurden. ____________

____

____

MÜNCHEN, *den* ____________________

Name: ______________________________

Aufgabe 1.

Im $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt seien die folgenden Untervektorräume U, W gegeben.

$$U := \{ \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha+\beta \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}, \qquad W := \{ \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 0 \\ \alpha+\beta \\ -\alpha+\beta \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}.$$

(a) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $U + W$.

[4 Punkte]

(b) Berechnen Sie den Abstand der affinen Unterräume $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + U$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + W$.

[4 Punkte]

Name: ____________________

Aufgabe 2.

Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beweise man: A symmetrisch $\iff \exists S \in \mathbb{C}^{n\times n}(A = S^{\mathrm{t}}S)$.

[6 Punkte]

Name: ______________________________

Aufgabe 3.

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\overline{A}^{\mathrm{t}} = -A$. Man beweise:

(a) Alle Eigenwerte von A sind rein imaginär.

[4 Punkte]

(b) Die Matrizen $E + A$ und $E - A$ sind invertierbar.

[2 Punkte]

(c) Ist A reell (und $A^{\mathrm{t}} = -A$), so ist $(E - A) \cdot (E + A)^{-1}$ orthogonal.

[4 Punkte]

Name: ____________________

Aufgabe 4.
Sei V ein K-Vektorraum der Dimension $n \geq 1$ und $f \in \mathrm{End}(V)$. Sei $p \in K[t]$ ein Polynom. Man beweise die folgende Aussage.

Ist $(t-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_n)$ charakteristisches Polynom von f, so ist $(t-p(\lambda_1))\cdot\ldots\cdot(t-p(\lambda_n))$ charakteristisches Polynom von $p(f)$.

Hinweis: aus der Vorlesung ist folgendes bekannt. Ist A eine darstellende Matrix von f, so ist $p(A)$ eine darstellende Matrix von $p(f)$.

[5 Punkte]

Name: ______________________________

Aufgabe 5.

Bestimmen Sie die Haupträume von $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

[6 Punkte]

Name: ______________________________

Name: ______________________________