Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Wintersemester 2009/10
Blatt 10

Übungen zu "Lineare Algebra I"

Aufgabe 37.
Man berechne die inverse Matrix von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 38.
Für jede 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

seien die Determinante $\det(A) \in \mathbb{R}$ von A und die Pseudoinverse $\widetilde{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert durch

$$\det(A) := ad - bc \qquad \text{und} \qquad \widetilde{A} := \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Man zeige das Folgende.

(a) Für alle $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
(b) Für alle $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = \det(A)E$.
(c) Für alle $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, gilt
  (i) A ist invertierbar genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$.
  (ii) Ist A invertierbar, so ist $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\widetilde{A}$.

Aufgabe 39. (Doppeldualraum, Teil 3)
Wir verwenden alle Bezeichnungen von Aufgabe 28 und 35 weiter.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{ev}\colon V \to V^{**}$ injektiv ist.
(b) Zeigen Sie, daß Bilder von V unter ev in V^{**} stets die Eigenschaft haben, auf nur endlich vielen der π_i von 0 verschieden zu sein.
  Mit anderen Worten: zeigen sie $\forall v \in V \exists K \in \mathbb{N} \forall k > K.\mathrm{ev}(v)(\pi_k) = 0$.
(c) Folgern Sie, daß $\mathrm{ev}\colon V \to V^{**}$ nicht surjektiv ist.

Aufgabe 40. (Dualraum als kontravarianter Funktor)
Für V und W Vektorräume und $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ definieren wir $f^*\colon W^* \to V^*$ durch $f^*(F) = F \circ f$.

Man beweise die folgenden Aussagen.

(i) Für $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ is $f^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$.
(ii) Die Abbildung $\mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$, $f \mapsto f^*$ ist linear.
(iii) $(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{V^*}$ wobei id_X die Identität auf dem Vektorraum X bezeichnet.
(iv) Für $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $g \in \mathrm{Hom}(W, X)$ ist $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Abgabetermin. Montag, 18.1.2010, 12hct im Übungskasten.