

Übungen zu “Lineare Algebra I”

Aufgabe 33. (Freie Vektorräume mit Basis M)

Sei M eine Menge und K ein Körper. Betrachte $K^{(M)} = \{(a_i)_{i \in M} \in K^M \mid a_i \neq 0 \text{ nur für endlich viele } i\}$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation.

- (a) Man zeige, daß $K^{(M)}$ mit der angegebenen Struktur ein K -Vektorraum ist.
- (b) Man zeige, daß $K^{(M)}$ der freie K -Vektorraum über M ist. Mit anderen Worten, man gebe eine geeignete Abbildung $\iota: M \rightarrow K^{(M)}$ an und beweise, daß es für alle K -Vektorräume V und alle Abbildungen $\iota': M \rightarrow V$ genau eine lineare Abbildung $f: K^{(M)} \rightarrow V$ gibt, so daß für alle $m \in M$ gilt $f(\iota(m)) = \iota'(m)$.

Bemerkung: Sie werden feststellen, daß Sie beim Beweis an keiner Stelle verwenden, daß es multiplikative Inverse in K gibt. In der Tat gilt die Aussage sogar, wenn K nur ein kommutativer Ring ist; man spricht dann vom “freien Modul”.

Aufgabe 34. (Basisergänzung und Freiheit von Vektorräumen)

Sei V ein K -Vektorraum.

Bemerkung: wir sagen, daß eine Menge $U \subseteq V$ linear unabhängig ist, falls es die zugehörige Familie $(u)_{u \in U}$ ist. Mit anderen Worten, U ist linear unabhängig, wenn für alle paarweise verschiedenen $u_1, \dots, u_n$ das Tupel $(u_1, \dots, u_n)$ linear unabhängig ist.

- (a) Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(V)$ Menge linear unabhängiger Teilmengen von V . Gelte ferner $\forall U, W \in \mathcal{U} (U \subseteq W \vee W \subseteq U)$. Man zeige, daß dann $\bigcup \mathcal{U} = \{x \mid \exists U \in \mathcal{U} (x \in U)\}$ linear unabhängig ist.

Sei nun U_0 linear unabhängig. Betrachten wir nun speziell $\mathcal{U} = \{U \subseteq V : U_0 \subseteq U \text{ und } U \text{ linear unabhängige}\}$, so ist $\mathcal{U} \neq \emptyset$ und nach (a) hat jede (bezüglich Inklusion) total geordnete Teilmenge von $\mathcal{U}$ eine obere Schranke in $\mathcal{U}$. Nach dem Zornschen Lemma hat $\mathcal{U}$ ein maximales Element.

- (b) Sei $U \subseteq V$ linear unabhängig und gelte ferner für jedes linear unabhängige $W \subseteq V$ mit $U \subseteq W$, daß $U = W$. Man zeige, daß U Basis von V ist.

Damit ist also gezeigt, daß jede linear unabhängige Menge zu einer Basis ergänzt werden kann. Dies darf in folgenden Übungsaufgaben verwendet werden.

- (c) Sei $U \subseteq V$ Basis, W ein K -Vektorraum, und $g: U \rightarrow W$ Abbildung. Man zeige, daß es genau eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ gibt mit $\forall v \in U (f(v) = g(v))$.

Aufgabe 35. (Duppeldualraum, Teil 2)

Betrachte den Vektorraum $V = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a_i \neq 0 \text{ nur für endlich viele } i\}$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation.

Bemerkung: In Aufgabe 33 wurde gezeigt, daß V mit der angegebenen Struktur tatsächlich ein Vektorraum ist.

Wir verwenden das "Kronecker Symbol" $\delta_{i,j}$, definiert durch

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- (a) Es sei $e_k = (\delta_{i,k})_{i \in \mathbb{N}} \in V$ die Folge die aus lauter Nullen besteht und nur an der k -ten Stelle eine Eins hat.

Zeigen Sie, daß $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ eine Basis von V ist.

- (b) Da wir lineare Abbildungen dadurch definieren können, daß wir die Bilder einer Basis beliebig vorgeben haben wir also insbesondere die Abbildungen π_i in V^* gegeben durch

$$\pi_i(e_j) = \delta_{i,j}$$

Zeigen Sie, daß $\{\pi_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset V^*$ linear unabhängig ist.

(Wird fortgesetzt auf Blatt 10.)

Aufgabe 36. (Zerlegung in Kern und Bild)

Es seien U und V Vektorräume.

- (a) Sei $C \subseteq U$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie, daß es einen Untervektorraum $X \subseteq U$ gibt, mit $U = C \oplus X$.
- (b) Sei $f: U \rightarrow V$ linear. Zeigen Sie, daß es $X \subseteq U$ Untervektorraum gibt mit $U = \text{Ke}(f) \oplus X$, und $X \rightarrow \text{Im}(f), x \mapsto f(x)$ ist Isomorphismus.

Abgabetermin. Montag, 21.12.2009, 12hct im Übungskasten.

Dies ist das letzte Übungsblatt vor den Ferien. Blatt 10 wird am 11.1.2010 veröffentlicht und ist am 18.1.2010 abzugeben. Wir wünschen allen frohe und gesegnete Weihnachten.