Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Wintersemester 2009/10
Blatt 8

Übungen zu "Lineare Algebra I"

Aufgabe 29. Gegeben seien folgende Vektoren in $\mathbb{R}^3$.

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Man zeige, daß (u, v, w) und (x, y, z) Basen des $\mathbb{R}^3$ sind.
(b) Man bestimme $p \in \{x, y, z\}$ so daß (u, v, p) Basis des $\mathbb{R}^3$ is.

Aufgabe 30. (Summe zweier Vektorräume)
Seien U und V Vektorräume über dem Körper K. Auf $U \times V := \{(u, v) : u \in U, v \in V\}$ wird durch $(u, v) + (u', v') := (u + u', v + v')$ eine Verknüpfung definiert und durch $\alpha(u, v) := (\alpha u, \alpha v)$ eine Multiplikation mit Körperelementen $\alpha \in K$.

Ferner definieren wir Abbildungen $\iota_U : U \to U \times V, u \mapsto (u, 0)$ und $\iota_V : V \to U \times V, v \mapsto (0, v)$.

Man zeige folgendes.

(a) $U \times V$ ist mit den angegeben Verküpfungen ein K-Vektorraum, und ι_U, ι_V sind lineare Abbildungen.
(b) Für jeden K-Vektorraum W und lineare Abbildungen $f : U \to W$, $g : V \to W$ gibt es *genau eine* lineare Abbildung $h : U \times V \to W$ mit $f = h \circ \iota_U$ und $g = h \circ \iota_V$.

Aufgabe 31.
Betrachte die folgende Menge F von Folgen reeller Zahlen.

$$F = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \forall n. a_n + a_{n+1} = a_{n+2}\}$$

Bemerkung: eine "Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$" ist nichts anderes als eine Funktion $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Dabei schreiben wir a_n für $a(n)$.

(a) Zeigen Sie, daß F mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist und bestimmen Sie dessen Dimension.
(b) Bestimmen Sie, mit Beweis, $p, q \in \mathbb{R}$ so, daß die Folgen $(p^n)_{n\in\mathbb{N}}, (q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Basis von F bilden.
(c) Stellen Sie $(1, 1, \ldots) \in F$ in der in Teilaufgabe (b) gefunden Basis da.

Aufgabe 32. (Gruppenhomomorphismen sind $\mathbb{Q}$-linear)
Seien U, V zwei $\mathbb{Q}$-Vektorräume. Durch vergessen der Vektorraumstruktur können wir U und V als abelsche Gruppen auffassen. Sei $f: U \to V$ ein Gruppenhomomorphismus. Man beweise, daß f dann auch ein Homomorphismus von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen ist.

Abgabetermin. Montag, 14.12.2009, 12hct im Übungskasten.