Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Wintersemester 2009/10
Blatt 7

Übungen zu "Lineare Algebra I"

Aufgabe 25. (Kommutatorgruppe)

(a) Sei G Gruppe, und $\emptyset \neq \mathcal{M}$ eine Menge von Untergruppen von G. Man zeige, daß $\bigcap \mathcal{M}$ eine Untergruppe von G ist.

Für $M \subseteq G$ setzt man $\langle M \rangle = \bigcap \{U \subseteq G : M \subseteq U$ und U ist Untergruppe von $G\}$. Nach Teilaufgabe (a) ist $\langle M \rangle$ also eine Untergruppe von G; sie heißt *die von M erzeugte Untergruppe*.

Sei G eine Gruppe. Wir setzen $K_G := \langle \{aba^{-1}b^{-1} : a, b \in G\} \rangle$. Man beweise

(b) Für alle $g \in G$ ist $\varphi_g(K_G) = K_G$, wobei $\varphi_g \colon G \to G$, $h \mapsto ghg^{-1}$ der von g induzierte innere Automorphismus ist.

(c) $K_G = \{e\}$ genau dann, wenn G abelsch ist.

Aufgabe 26.

Seien U und V beide K-Vektorräume. Eine Abbildung $f \colon U \to V$ heißt *linear* oder *Vektorraumhomomorphismus*, falls $\forall u, v \in U (f(u + v) = f(u) + f(v))$ und $\forall v \in U\, \forall \alpha \in K (f(\alpha v) = \alpha f(v))$.

(a) Man beweise für U, V, W alle K-Vektorräume und $f \colon U \to V$ und $g \colon V \to W$ linear, daß $g \circ f$ linear ist.

Für eine lineare Abbildung $f \colon U \to V$ und $\alpha \in K$ setzt man $(\alpha f) \colon U \to V$, $u \mapsto \alpha f(u)$.

(b) Man zeige, daß αf eine lineare Abbildung ist.

(c) Man zeige, daß $(\alpha f) \circ g = \alpha(f \circ g) = f \circ (\alpha g)$.

(d) Man gebe ein Beispiel für einen Vektorraum V und lineare Abbildungen $f, g \colon V \to V$ an, mit $f \circ g \neq g \circ f$.

Aufgabe 27.

Seien U, V K-Vektorräume und $f \colon U \to V$ linear. Man beweise.

(a) $\mathrm{Im}(f) := f(U)$ ist Untervektorraum von V.

(b) $\mathrm{Ke}(f) := \{u \in U : f(u) = 0\}$ ist Untervektorraum von U.

(c) f ist injektiv genau dann, wenn $\mathrm{Ke}(f) = \{0\}$.

Aufgabe 28. (Doppeldualraum, Teil 1)
Sei V ein K-Vektorraum.

(a) Man zeige, daß $V^* := \mathrm{Hom}(V, K) := \{f\colon V \to K \mid f \text{ linear}\}$ ein Vektorraum mit komponentenweiser Addition und Multiplikation ist (dh mit $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$ und $(\alpha f)(v) = \alpha f(v)$).
Bemerkung: V^* heißt der "Dualraum" zu V.

(b) Nach (a) ist also auch $V^{**} = (V^*)^*$ ein Vektorraum, der sogenannte "Doppeldualraum". Man zeige, daß die Auswerteabbildung $\mathrm{ev}\colon V \to V^{**}$, gegeben durch
$$\mathrm{ev}(v)(f) = f(v)$$
ein Vektorraumhomomorphismus ist.

Abgabetermin. Montag, 7.12.2009, 12hct im Übungskasten.