Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Wintersemester 2009/10
Blatt 6

Übungen zu "Lineare Algebra I"

Aufgabe 21.
Man bestimme (bis auf Isomorphie) alle Gruppen mit genau 4 Elementen.

Aufgabe 22.
Sei G eine Gruppe. Es ist $\mathrm{Aut}(G) = \{g\colon G \to G \mid g \text{ ist Gruppenisomorphismus}\}$ offenbar eine Untergruppe von $\subseteq S(G)$, die sogenannte "Automorphismengruppe".

Man zeige daß $\varphi\colon G \to \mathrm{Aut}(G), a \mapsto \varphi_a$ ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist, wobei $\varphi_a\colon G \to G, b \mapsto aba^{-1}$. (Insbesondere ist also auch $\varphi_a \in \mathrm{Aut}(G)$ zu zeigen).

Ferner gebe man eine Gruppe G an, bei der φ nicht injektiv ist.

Aufgabe 23.
Seien G, H Gruppen und $f\colon G \to H$ Gruppenhomomorphismus.

Man beweise die folgenden Aussagen.

(a) $\mathrm{Im}(f) := f(G) \subseteq H$ ist eine Untergruppe.
(b) $\mathrm{Ke}(f) := \{g \in G : f(g) = e\} \subseteq G$ ist eine Untergruppe.
(c) $\mathrm{Ke}(f)$ ist invariant unter inneren Automorphismen, d.h., für $a \in G$ und $\varphi_a\colon G \to G, b \mapsto aba^{-1}$ ist $\varphi_a(\mathrm{Ke}(f)) = \mathrm{Ke}(f)$.

Aufgabe 24.
Sei $(V, +)$ abelsche Gruppe. Wir betrachten die Menge aller $f\colon V \to V$ die Gruppenhomomorphismen sind. Auf dieser Menge definieren wir durch $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$ und $(f \circ g)(v) = f(g(v))$ zwei Verknüpfungen.

Man zeige, daß die Menge aller Gruppenhomomorphismen von V nach V mit diesen Verknüpfungen einen Ring mit Identität als Einselement bilden. Außerdem gebe man (mit Beweis!) ein $(V, +)$ an, für das dieser Ring nicht kommutativ ist.

Abgabetermin. Montag, 30.11.2009, 12hct im Übungskasten.