Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Wintersemester 2009/10
Blatt 5

Übungen zu "Lineare Algebra I"

Aufgabe 17. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, wie der Begriffe Gruppe anders definiert werden kann — und wie nicht.

(a) Es sei G eine Menge und $\circ\colon G \times G \to G$ eine Abbildung, infix geschrieben. Es sei $e \in G$ und für alle x, y, z gelte

$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$	Assoziativität
$x \circ e = x$	rechts-neutrales Element
$\exists x'(x \circ x' = e)$	rechts-inverses Element

Man zeige, daß G eine Gruppe ist.

Hinweis: um beispielsweise $e \circ x = x$ zu zeigen, kann es hilfreich sein, zunächst $e \circ x \circ x' = x \circ x'$ für ein geeignetes x' zu zeigen. Man überlege sich, warum dies genügt.

(b) Man gebe eine Menge G mit einer Abbildung $\circ\colon G \times G \to G$ und einem Element $e \in G$ an, so daß für alle x, y und z gilt

$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$	Assoziativität
$x \circ e = x$	rechts-neutrales Element
$\exists x'(x' \circ x = e)$	links-inverses Element

aber G *keine* Gruppe ist.

Hinweis: betrachte die Verknüpfung $x \circ y := x$.

Aufgabe 18. Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe und I eine Menge. Mit $G^I = \{f\colon I \to G \mid f \text{ Abbildung}\}$ bezeichnen wir die Menge aller Abbildungen von I nach G. Auf G^I wird durch $(f \cdot g)(i) = f(i) \cdot g(i)$ eine Verknüpfung $\cdot$ definiert.

Bemerkung: auch wenn es für diese Aufgabe nicht benötigt ist, dürfen sie $I \neq \emptyset$ voraussetzen; damit erübrigen sich Fragen zum Status einer Funktion mit leerem Definitionsbereich.

Man zeige.

(a) G^I ist eine Gruppe.

(b) Ist G abelsch, so auch G^I.

(c) $G^{(I)} \subseteq G^I$ ist eine Untergruppe. Dabei ist $G^{(I)} = \{f\colon I \to G \mid |\{i \in I : f(i) \neq e\}| < \infty\}$ die Menge aller derjenigen Abbildungen von I nach G, die nur an endlich vielen Stellen von e verschieden sind.

Bemerkung: eine Untergruppe einer Gruppe ist eine Teilmenge der Gruppe, die das neutrale Element enhält und abgeschlossen unter Multiplikation und Inversenbildung ist.

Aufgabe 19. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, daß die Untergruppen der Symmetrischen Gruppen "im wesentlichen" alle Gruppen sind.

Sei G Gruppe. Für $g \in G$ sei $\lambda_g \colon G \to G$, $h \mapsto gh$ die Linksmultiplikation.

(a) Man zeige $\lambda_g \in S(G)$. Mit anderen Worten, man zeige, daß λ_g eine Bijektion ist.

Nun setzt man $\lambda \colon G \to S(G)$, $g \mapsto \lambda_g$.

(b) $\lambda(e) = \mathrm{id}_G$
(c) $\lambda(gh) = \lambda(g) \circ \lambda(h)$
(d) λ ist injektiv.

Bemerkung: (b)–(d) sagen, daß λ injektiver Gruppenhomomorphismus von G nach $S(G)$ ist. Mit anderen Worten, vermöge λ kann G als Untergruppe der symmetrischen Gruppe $S(G)$ aufgefaßt werden.

Aufgabe 20. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Man zeige, daß $(\{x \in \mathbb{R}^m : Ax = 0\}, +, 0)$ eine abelsche Gruppe ist.

Abgabetermin. Montag, 23.11.2009, 12hct im Übungskasten.