

Übungen zu “Lineare Algebra I”

Aufgabe 13. (Binomischer Lehrsatz)

Ist n eine natürliche Zahl so bezeichnen wir mit $n!$ das Produkt der Zahlen 1 bis n , also

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

Mit anderen Worten $0! = 1$, $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ sind wie folgt definiert.

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man zeige das folgende.

(a) Es gilt

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

(b) Sind A und B quadratische Matrizen mit $AB = BA$, so gilt

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Bemerkung: die in (b) bewiesene Formel wird auch als “binomische Formel” bezeichnet.

Aufgabe 14.

Seien A und B Mengen und $f: A \rightarrow B$ eine Funktion. Es bezeichne f^{-1} die Urbildfunktion, also $f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}$ für $Y \subseteq B$. Ferner ist für $X \subseteq A$ die Schreibweise $f(X)$ definiert als $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$.

Man beweise für $M, N \subseteq B$ und $X, Y \subseteq A$.

(a) $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$

(b) $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$

(c) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

(d) Es gibt A und B Mengen, $f: A \rightarrow B$ Funktion, sowie $X, Y \subseteq A$ mit $f(X \cap Y) \neq f(X) \cap f(Y)$.

Aufgabe 15.

Für $\mathcal{M}$ eine Menge von Mengen definiert man die Vereinigung als

$$\bigcup \mathcal{M} = \{x : \exists A \in \mathcal{M} \ x \in A\}$$

- (a) Man zeige $\bigcup\{A, B\} = A \cup B$.
(b) Man zeige für $\bigcup \mathcal{M} \subseteq X$, $f: X \rightarrow Y$ Abbildung daß

$$f(\bigcup \mathcal{M}) = \bigcup \{f(A) : A \in \mathcal{M}\}$$

Aufgabe 16. (Kategorische Beschreibung von Injektivität)

Sei $f: Y \rightarrow Z$ Abbildung. Man beweise

f ist genau dann injektiv, wenn für jede Menge X und alle Abbildungen $g, g': X \rightarrow Y$ gilt: $f \circ g = f \circ g' \Rightarrow g = g'$.

Abgabetermin. Montag, 16.11.2009, 12hct im Übungskasten.