MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Wintersemester 2009/10
Blatt 3

Übungen zu "Lineare Algebra I"

Aufgabe 9. (Invertieren von 2×2-Matrizen)
Für welche Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

existiert eine Matrix

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$$

derart, daß $AX = E$ gilt? Wie lauten im Fall, daß so ein X existiert dessen Einträge x, y, z, u in Abhängigkeit von a, b, c, d?

Bemerkung: Wie bei allen Mathematischen Übungsblättern ist die Richtigkeit Ihrer Antwort selbverständlich zu beweisen.

Aufgabe 10. (Invertierbarkeit von $E - A$ für nilpotentes A)

(a) Es sei $A = (\delta_{i+1,j})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, daß es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $A^k = 0$.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig, so daß für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt, daß $A^k = 0$. Zeigen Sie, daß es ein $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt mit $(E - A)X = E$.
Hinweis: betrachte die geometrische Reihe $\sum_i A^i$.

Aufgabe 11. (Nilpotente 2×2-Matrizen)
Man bestimme alle $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $A^2 = 0$.

Aufgabe 12.

(a) Man beweise für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \iff AB = BA.$$

(b) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Man zeige: $AB = BA$.

Abgabetermin. Montag, 9.11.2009, 12hct im Übungskasten.