Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Wintersemester 2009/10
Blatt 10

Übungen zu "Lineare Algebra I"

Aufgabe 37.
Man berechne die inverse Matrix von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösungshinweise.
Das Inverse der Matrix A wird berechnet, indem A mittels elementarer Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix überführt wird und gleichzeitig dieselben Umformungen auf die Einheitsmatrix angewendet werden. Das Inverse von A ist dann diejenige Matrix, die durch diese Umformungen aus der Einheitsmatrix entstanden ist.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Damit ist das Inverse von A gegeben durch

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 38.
Für jede 2×2-Matrix
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$
seien die Determinante $\det(A) \in \mathbb{R}$ von A und die Pseudoinverse $\widetilde{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert durch
$$\det(A) := ad - bc \qquad \text{und} \qquad \widetilde{A} := \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Man zeige das Folgende.

(a) Für alle $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, gilt $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
(b) Für alle $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt $A\widetilde{A} = \widetilde{A}A = \det(A)E$.
(c) Für alle $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, gilt
 (i) A ist invertierbar genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$.
 (ii) Ist A invertierbar, so ist $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\widetilde{A}$.

Lösungshinweise.

(a) Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben durch
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$
Dann gilt
$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} \\
&= (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg) \\
&= aecf + aedh + bgcf + bgdh - afce - afdg - bhce - bhdg \\
&= adeh + bcfg - adfg - bceh = (ad-bc)(eh-fg) \\
&= \det(A)\det(B).
\end{aligned}$$

(b) Für A und $\widetilde{A}$ wie oben gilt
$$\begin{aligned}
A\widetilde{A} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -cb+da \end{pmatrix} = \det(A)E, \\
\widetilde{A}A &= \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da-bc & db-bd \\ -ca+ac & -cb+ad \end{pmatrix} = \det(A)E.
\end{aligned}$$

(c) (i) $\Rightarrow$: Sei A invertierbar. Dann existiert $A^{-1} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, und es gilt
$$\begin{aligned}
\det(A)\det(A^{-1}) &\overset{(a)}{=} \det(AA^{-1}) \\
&= \det(E) \\
&= 1 \\
&= \det(E) \\
&\overset{(a)}{=} \det(A^{-1})\det(A).
\end{aligned}$$
Also ist $\det(A)$ invertierbar und damit insbesondere ungleich Null.

$\Leftarrow$: Sei $\det(A) \neq 0$. Dann ist $\frac{1}{\det(A)}\widetilde{A}$ wohldefiniert, und es gilt

$$\begin{aligned} A\left(\frac{1}{\det(A)}\widetilde{A}\right) &= \frac{1}{\det(A)}A\widetilde{A} \\ &\overset{(b)}{=} E \\ &\overset{(b)}{=} \left(\frac{1}{\det(A)}\widetilde{A}\right)A. \end{aligned}$$

Somit ist A invertierbar mit Inversem $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\widetilde{A}$.

(ii) Ergibt sich unmittelbar aus dem Beweis von "(i)$\Leftarrow$".

Aufgabe 39. (Doppeldualraum, Teil 3)
Wir verwenden alle Bezeichnungen von Aufgabe 28 und 35 weiter.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{ev}\colon V \to V^{**}$ injektiv ist.
(b) Zeigen Sie, daß Bilder von V unter ev in V^{**} stets die Eigenschaft haben, auf nur endlich vielen der π_i von 0 verschieden zu sein.
Mit anderen Worten: zeigen sie $\forall v \in V \exists K \in \mathbb{N} \forall k > K. \mathrm{ev}(v)(\pi_k) = 0$.
(c) Folgern Sie, daß $\mathrm{ev}\colon V \to V^{**}$ nicht surjektiv ist.

Lösungshinweise.

(a) Da ev linear ist genügt es zu zeigen, daß der Kern 0 ist. Sei also $\mathrm{ev}(v) = 0$. Wir zeigen daß $v = 0$. Angenommen nicht. Dann ist $\{v\}$ linear unabhängig und kann zu einer Basis ergänzt werden; wir können eine lineare Abbildung dadurch definieren, daß wir die Bilder der Basis beliebig vorgeben. Insbesondere gibt es ein $f \in V^*$ mit $f(v) = 1$. Dann ist aber $\mathrm{ev}(v)(f) = f(v) = 1 \neq 0$ im Widerspruch zu $\mathrm{ev}(v) = 0$.
(b) Sei also $v \in V$. Da die e_k gemäß 35(a) eine Basis von V bilden, gibt es $\ell \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_\ell \in \mathbb{N}$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in \mathbb{R}$ mit $v = \alpha_1 e_{k_1} + \ldots + \alpha_K e_{k_\ell}$. Sei $K = \max\{k_1, \ldots, k_\ell\}$.
Sei $k > K$, dann ist $\mathrm{ev}(v)(\pi_k) = \pi_k(v) = \pi_k(\alpha_1 e_{k_1} + \ldots + \alpha_\ell e_{k_\ell}) = \alpha_1 \pi_k(e_{k_1}) + \ldots + \alpha_\ell \pi_k(e_{k_\ell}) = 0$, da k größer als K und damit als alle k_i und also insbesondere von allen k_i verschieden.
(c) Da die $\{\pi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ nach 35(b) linear unabhängig sind, können wir sie zu einer Basis ergänzen. Da wir lineare Abbildungen dadurch definieren können, gibt es also eine lineare Abbildung $E\colon V^* \to \mathbb{R}$ mit $E(\pi_i) = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dieses E ist aber nicht im Bild von ev.
Angenommen doch, etwa $\mathrm{ev}(v) = E$. Dann gilt aber für alle $i \in \mathbb{N}$ daß $1 = E(\pi_i) = \mathrm{ev}(v)(\pi_i)$ im Widerspruch zu (b).

Aufgabe 40. (Dualraum als kontravarianter Funktor)
Für V und W Vektorräume und $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ definieren wir $f^*\colon W^* \to V^*$ durch $f^*(F) = F \circ f$.

Man beweise die folgenden Aussagen.

(i) Für $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ is $f^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$.
(ii) Die Abbildung $\mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$, $f \mapsto f^*$ ist linear.
(iii) $(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{V^*}$ wobei id_X die Identität auf dem Vektorraum X bezeichnet.

(iv) Für $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $g \in \mathrm{Hom}(W, X)$ ist $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Lösungshinweise.

Abgabetermin. Montag, 18.1.2010, 12hct im Übungskasten.