Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Wintersemester 2009/10
Blatt 9

Übungen zu "Lineare Algebra I"

Aufgabe 33. (Freie Vektorräume mit Basis M)
Sei M eine Menge und K ein Körper. Betrachte $K^{(M)} = \{(a_i)_{i\in M} \in K^M \mid a_i \neq 0 \text{ nur für endlich viele } i\}$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation.

(a) Man zeige, daß $K^{(M)}$ mit der angegebenen Struktur ein K-Vektorraum ist.
(b) Man zeige, daß $K^{(M)}$ der freie K-Vektorraum über M ist. Mit anderen Worten, man gebe eine geeignete Abbildung $\iota\colon M \to K^{(M)}$ an und beweise, daß es für alle K-Vektorräume V und alle Abbildungen $\iota'\colon M \to V$ genau eine lineare Abbildung $f\colon K^{(M)} \to V$ gibt, so daß für alle $m \in M$ gilt $f(\iota(m)) = \iota'(m)$.

Bemerkung: Sie werden feststellen, daß Sie beim Beweis an keiner Stelle verwenden, daß es multiplikative Inverse in K gibt. In der Tat gilt die Aussage sogar, wenn K nur ein kommutativer Ring ist; man spricht dann vom "freien Modul".

Lösungshinweise.

(a) Es genügt zu zeigen, daß $K^{(M)} \subseteq K^M$ ein Untervektorraum ist. In der Tat rechnet man leicht nach, daß gilt $\operatorname{supp}(f+g) \subseteq \operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(g)$ und $\operatorname{supp}(\alpha f) \subseteq \operatorname{supp}(f)$, wobei $\operatorname{supp}(f) = \{a : f(a) \neq 0\}$ der Träger ("support").
(b) Setze $\iota(m) = (\delta_{im})_{i\in M}$.
Sei $j\colon M \to V$ wie angegeben. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit der gesuchten Abbildung f. Sei also $(a_i)_{i\in M} \in k^{(M)}$ und seien $i_1, \ldots, i_\ell$ diejenigen endlich vielen $i \in M$ mit $a_i \neq 0$. Dann ist $f((a_i)) = f((a_{i_1}\delta_{ii_1})_i + \ldots + (a_{i_\ell}\delta_{ii_\ell})_i) = f(a_{i_1}\iota(i_1) + \ldots + a_{i_\ell}\iota(i_\ell)) = a_{i_1} f(\iota(i_1)) + \ldots + a_{i_\ell} f(\iota(i_\ell)) = a_{i_1}\iota'(i_1) + \ldots + a_{i_\ell}\iota'(i_\ell)$.
Man rechnet leicht nach, daß das so definierte f in der Tat wohldefiniert ist (da $+$ in V kommutativ, ist der Ausdruck $a_{i_1}\iota'(i_1) + \ldots + a_{i_\ell}\iota'(i_\ell)$ unabhängig von der willkürlichen Auswahl einer Reihenfolge auf der von 0 verschiedenen Folgeglieder. Dann sieht man leicht, daß f auch eine lineare Abbildung ist.

Aufgabe 34. (Basisergänzung und Freiheit von Vektorräumen)
Sei V ein K-Vektorraum.

Bemerkung: wir sagen, daß eine Menge $U \subseteq V$ linear unabhängig ist, falls es die zugehörige Familie $(u)_{u\in U}$ ist. Mit anderen Worten, U ist linear unabhängig, wenn für alle paarweise verschiedenen $u_1, \ldots, u_n$ das Tupel $(u_1, \ldots, u_n)$ linear unabhängig ist.

(a) Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(V)$ Menge linear unabhängiger Teilmengen von V. Gelte ferner $\forall U, W \in \mathcal{U}(U \subseteq W \vee W \subseteq U)$. Man zeige, daß dann $\bigcup \mathcal{U} = \{x \mid \exists U \in \mathcal{U}(x \in U)\}$ linear unabhängig ist.

Sei nun U_0 linear unabhängig. Betrachten wir nun speziell $\mathcal{U} = \{U \subseteq V : U_0 \subseteq U$ und U linear unabhängig$\}$, so ist $\mathcal{U} \neq \emptyset$ und nach (a) hat jede (bezüglich Inklusion) total geordnete Teilmenge von $\mathcal{U}$ eine obere Schranke in $\mathcal{U}$. Nach dem Zornschen Lemma hat $\mathcal{U}$ ein maximales Element.

(b) Sei $U \subseteq V$ linear unabhängig und gelte ferner für jedes linear unabhängige $W \subseteq V$ mit $U \subseteq W$, daß $U = W$. Man zeige, daß U Basis von V ist.

Damit ist also gezeigt, daß jede linear unabhängige Menge zu einer Basis ergänzt werden kann. Dies darf in folgenden Übungsaufgaben verwendet werden.

(c) Sei $U \subseteq V$ Basis, W ein K-Vektorraum, und $g \colon U \to W$ Abbildung. Man zeige, daß es genau eine lineare Abbildung $f \colon V \to W$ gibt mit $\forall v \in U(f(v) = g(v))$.

Lösungshinweise.

(a) Angenommen nicht. Dann gibt es $u_1, \ldots, u_n \in \bigcup \mathcal{U}$ paarweise verschieden, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ nicht alle 0 mit $\sum_i \alpha_i u_i = 0$. Da $u_i \in \bigcup \mathcal{U}$ gibt es $U_i \in \mathcal{U}$ mit $u_i \in U_i$. Da die U_i total geordnet, gibt es k mit $U_1, \ldots, U_n \subseteq U_k$. Dies steht aber im Widerspruch zu U_k linear unabhaängig.

(b) Da U nach Voraussetzung linear unabhängig ist müssen wir nur noch zeigen, daß U auch Erzeugendensystem ist. Sei also $v \in V$. Falls $v \in U$ ist die Behauptung klar. Andernfalls ist aber $U \cup \{v\}$ echte Obermenge von U, also linear abhängig. Da U linear unabhängig ist, muß v mit von 0 verschiedenem Koeffizienten an der die lineare Abhängigkeit bezeugenden Linearkombination beteiligt sein. Auflösen nach v liefert die Behauptung.

(c) Da U Basis von V gibt es für jedes $v \in V$ genau eine(!) Darstellung von v als $v = \sum_i \alpha_i u_i$ mit $u_1, \ldots, u_n \in U$ paarweise verschieden, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ alle nicht 0. Wir setzen $f(v) = \sum_i \alpha_i g(u_i)$.

Aufgabe 35. (Duppeldualraum, Teil 2)
Betrachte den Vektorraum $V = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a_i \neq 0$ nur für endlich viele $i\}$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation.

Bemerkung: In Aufgabe 33 wurde gezeigt, daß V mit der angebenen Struktur tatsächlich ein Vektorraum ist.

Wir verwenden das "Kronecker Symbol" $\delta_{i,j}$, definiert durch

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Es sei $e_k = (\delta_{i,k})_{i \in \mathbb{N}} \in V$ die Folge die aus lauter Nullen besteht und nur an der k-ten Stelle eine Eins hat.

Zeigen Sie, daß $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ eine Basis von V ist.

(b) Da wir lineare Abbildungen dadurch definieren können, daß wir die Bilder einer Basis beliebig vorgeben haben wir also insbesondere die Abbildungen π_i in V^* gegeben durch

$$\pi_i(e_j) = \delta_{i,j}$$

Zeigen Sie, daß $\{\pi_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset V^*$ linear unabhängig ist.

(Wird fortgesetzt auf Blatt 10.)

Lösungshinweise.

(a) Linear unabhängig. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in \mathbb{R}$ und $k_1, \ldots, k_\ell \in \mathbb{N}$ paarweise verschieden mit $\alpha_1 e_{k_1} + \ldots + \alpha_\ell e_{k_\ell} = 0 = (0)_{n\in\mathbb{N}}$. Folgen sind gleich, wenn Sie an jeder Stelle gleich sind; insbesondere liefert ein Vergleich an der Stelle k_i daß $\alpha_i = 0$.

Erzeugendensystem. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V$ und seien $i_1, \ldots, i_\ell$ die endlich vielen(!) Stellen, an denen $a_i \neq 0$. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = a_{i_1} e_{i_1} + \ldots + a_{i_\ell} e_{i_\ell}$.

(b) Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in \mathbb{R}$ und $k_1, \ldots, k_\ell \in \mathbb{N}$ paarweise verschieden mit $\alpha_1 \pi_{i_1} + \ldots + \alpha_\ell \pi_{i_\ell} = 0$. Insbesondere gilt an der Stelle e_{i_j} gerade $0 = 0(e_{i_j}) = (\alpha_1 \pi_{i_1} + \ldots + \alpha_\ell \pi_{i_\ell})(e_{i_j}) = \alpha_1 \pi_{i_1}(e_{i_j}) + \ldots + \alpha_\ell \pi_{i_\ell}(e_{i_j}) = \alpha_j$.

Aufgabe 36. (Zerlegung in Kern und Bild)
Es seien U und V Vektorräume.

(a) Sei $C \subseteq U$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie, daß es einen Untervektorraum $X \subseteq U$ gibt, mit $U = C \oplus X$.

(b) Sei $f\colon U \to V$ linear. Zeigen Sie, daß es $X \subseteq U$ Untervektorraum gibt mit $U = \mathrm{Ke}(f) \oplus X$, und $X \to \mathrm{Im}(f), x \mapsto f(x)$ ist Isomorphismus.

Lösungshinweise.

(a) Sei $B_C \subseteq K$ eine Basis von C. Ergänze B_K zu einer Basis $B_U \supset B_C$ von U. Setze $X = \mathrm{span}(B_U \setminus B_C)$. Dann gilt $U = C \oplus X$.

In der Tat, $C + X = \mathrm{span}(B_C) + \mathrm{span}(B_U \setminus B_C) = \mathrm{span}(B_C \cup (B_U \setminus B_C)) = \mathrm{span}(B_U) = U$. Ferner gilt für $v \in X \cap K$, daß sich v schreiben läßt als $v = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_k b_k = \alpha'_1 b'_1 + \ldots + \alpha'_\ell b'_\ell$ mit $b_1, \ldots, b_k \in B_U \setminus B_C$ und $b'_1, \ldots, b'_\ell \in B_C$ jeweils paarweise verschieden. Da $b_1, \ldots, b_k, b'_1, \ldots, b'_\ell$ paarweise verschiede Elemente der Basis B_U sind, also insbesondere linear unabhängig, gilt $0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = \alpha'_1 = \ldots = \alpha'_\ell$, insbesondere also $v = 0$.

Bemerkung: X ist nicht eindeutig bestimmt.

(b) Es ist $\mathrm{Ke}(f) \subseteq U$ Untervektorraum. Also gibt es nach (a) ein X mit $\mathrm{Ke}(f) \oplus X = U$. Zeige noch $X \to \mathrm{Im}(f), x \mapsto f(x)$ ist bijektiv.

In der Tat, sei $v \in \mathrm{Im}(f)$. Dann gibt es $u \in U$ mit $v = f(u)$. Schreibe u also $u = k + x$ mit $k \in \mathrm{Ke}(f)$, $x \in X$. Dann gilt $f(x) = f(x + k - k) = f(x + k) - f(k) = f(u) - 0 = v$.

Sei $x \in X$ mit $f(x) = 0$. Dann $x \in \mathrm{Ke}(f)$, also $x \in X \cap \mathrm{Ke}(f) = \{0\}$. Also $x = 0$.

Abgabetermin. Montag, 21.12.2009, 12hct im Übungskasten.

Dies ist das letzte Übungsblatt vor den Ferien. Blatt 10 wird am 11.1.2010 veröffentlicht und ist am 18.1.2010 abzugeben. Wir wünschen allen frohe und gesegnete Weihnachten.