Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Wintersemester 2009/10
Blatt 8

Übungen zu "Lineare Algebra I"

Aufgabe 29. Gegeben seien folgende Vektoren in $\mathbb{R}^3$.

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Man zeige, daß (u, v, w) und (x, y, z) Basen des $\mathbb{R}^3$ sind.
(b) Man bestimme $p \in \{x, y, z\}$ so daß (u, v, p) Basis des $\mathbb{R}^3$ is.

Aufgabe 30. (Summe zweier Vektorräume)
Seien U und V Vektorräume über dem Körper K. Auf $U \times V := \{(u, v) : u \in U, v \in V\}$ wird durch $(u, v) + (u', v') := (u + u', v + v')$ eine Verknüpfung definiert und durch $\alpha(u, v) := (\alpha u, \alpha v)$ eine Multiplikation mit Körperelementen $\alpha \in K$.

Ferner definieren wir Abbildungen $\iota_U : U \to U \times V, u \mapsto (u, 0)$ und $\iota_V : V \to U \times V, v \mapsto (0, v)$.

Man zeige folgendes.

(a) $U \times V$ ist mit den angegeben Verküpfungen ein K-Vektorraum, und ι_U, ι_V sind lineare Abbildungen.
(b) Für jeden K-Vektorraum W und lineare Abbildungen $f : U \to W$, $g : V \to W$ gibt es *genau eine* lineare Abbildung $h : U \times V \to W$ mit $f = h \circ \iota_U$ und $g = h \circ \iota_V$.

Aufgabe 31.
Betrachte die folgende Menge F von Folgen reeller Zahlen.

$$F = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \forall n.a_n + a_{n+1} = a_{n+2}\}$$

Bemerkung: eine "Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$" ist nichts anderes als eine Funktion $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Dabei schreiben wir a_n für $a(n)$.

(a) Zeigen Sie, daß F mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist und bestimmen Sie dessen Dimension.
(b) Bestimmen Sie, mit Beweis, $p, q \in \mathbb{R}$ so, daß die Folgen $(p^n)_{n\in\mathbb{N}}, (q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Basis von F bilden.
(c) Stellen Sie $(1, 1, \ldots) \in F$ in der in Teilaufgabe (b) gefunden Basis da.

Lösungshinweise.

(a) Es ist zu zeigen, daß F ein Untervektorraum des Vektorraums aller reellen Folgen ist. Seien $(a_n)_n, (b_n)_n \in F$. Dann gilt für alle n, daß $(a_n + b_n) + (a_{n+1}+b_{n+1}) = a_n+a_{n+1}+b_n+b_{n+2} = a_{n+2}+b_{n+2}$ sowie $(\alpha a_n)+(\alpha a_{n+1}) = \alpha(a_n + a_{n+1}) = \alpha a_{n+2}$.

Der Vektorraum ist 2-Dimensional wobei $(0, 1, \ldots)$ und $(1, 0, \ldots)$ eine mögliche Basis ist. Um dies einzusehen zeigt man durch Induktion nach n, daß folgendes gilt

Seien $(a_n), (b_n) \in F$ mit $a_0 = b_0$ und $a_1 = b_1$. Dann $a_n = b_n$.

Außerdem kann man gegebene $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ leicht einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{B}} \in F$ fortsetzen.

(b) Damit p^n die Rekursionsgleichung löst müssen p und q Lösungen der Gleichung $1+x = x^2$ sein; man überzeugt sich leicht, daß für jede Lösung dann auch die ganze Folge in F liegt.

Als Lösungen finden wir $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Offenbar sind diese beiden folgen auch linear unabhängig – und damit eine Basis, da wir in (a) gesehen haben, daß der Vektorraum 2-dimensional ist.

(c) Für die Darstellung $(1, 1, \ldots) = \alpha(p^n) + \beta(q^n)$ mit $p = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ und $q = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} \alpha & + & \beta & = & 1 \\ \alpha p & + & \beta q & = & 1 \\ & & & & \\ \alpha & + & \beta & = & 1 \\ \alpha(p-q) & & & = & 1-q \end{array}$$

Wegen $p - q = \sqrt{5}$ ergibt sich also $\alpha = \frac{1-q}{\sqrt{5}} = \frac{p}{\sqrt{5}}$ damit $\beta = 1 - \frac{p}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-p}{\sqrt{5}} = \frac{-q}{\sqrt{5}}$.

Aufgabe 32. (Gruppenhomomorphismen sind $\mathbb{Q}$-linear)
Seien U, V zwei $\mathbb{Q}$-Vektorräume. Durch vergessen der Vektorraumstruktur können wir U und V als abelsche Gruppen auffassen. Sei $f : U \to V$ ein Gruppenhomomorphismus. Man beweise, daß f dann auch ein Homomorphismus von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen ist.

Lösungshinweise.
Für $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $p, q > 0$ und $u \in U$ gilt $f(pu) = f(u+\ldots+u) = f(u)+\ldots+f(u) = pf(u)$. Ferner $f(pu) = f(q\frac{p}{q}u) = f(\frac{p}{q}u)+\ldots+f(\frac{p}{q}u) = qf(\frac{p}{q}u)$. Zusammenfasssend ergibt sich $qf(\frac{p}{q}u) = pf(u)$ und damit $f(\frac{p}{q}u) = \frac{p}{q}f(u)$.

Abgabetermin. Montag, 14.12.2009, 12hct im Übungskasten.