

Übungen zu "Lineare Algebra I"

Aufgabe 25. (Kommutatorgruppe)

- (a) Sei G Gruppe, und $\emptyset \neq \mathcal{M}$ eine Menge von Untergruppen von G . Man zeige, daß $\bigcap \mathcal{M}$ eine Untergruppe von G ist.

Für $M \subseteq G$ setzt man $\langle M \rangle = \bigcap \{U \subseteq G : M \subseteq U \text{ und } U \text{ ist Untergruppe von } G\}$. Nach Teilaufgabe (a) ist $\langle M \rangle$ also eine Untergruppe von G ; sie heißt *die von M erzeugte Untergruppe*.

Sei G eine Gruppe. Wir setzen $K_G := \langle \{aba^{-1}b^{-1} : a, b \in G\} \rangle$. Man beweise

- (b) Für alle $g \in G$ ist $\varphi_g(K_G) = K_G$, wobei $\varphi_g: G \rightarrow G, h \mapsto ghg^{-1}$ der von g induzierte innere Automorphismus ist.
(c) $K_G = \{e\}$ genau dann, wenn G abelsch ist.

Lösungshinweise.

- (a) Für $U \in \mathcal{M}$ ist $e \in U$, also $e \in \bigcap \mathcal{M}$. Seien $x, y \in \bigcap \mathcal{M}$ und $U \in \mathcal{M}$, dann $x, y \in U$, also $xy \in U$. Es folgt $xy \in \bigcap \mathcal{M}$. Ebenso für Inverse.
(b) Für $g, a, b \in G$ ist $\varphi_g(aba^{-1}b^{-1}) = gaba^{-1}b^{-1} = gagg^{-1}bgg^{-1}a^{-1}gg^{-1}b^{-1}$, also der Kommutator von $\varphi_g(a)$ und $\varphi_g(b)$. Damit ist $\varphi_g(K_G) \subseteq K_G$ gezeigt. Also auch $\varphi_{g^{-1}}(K_G) \subseteq K_G$ und damit $K_G = \varphi_g(\varphi_{g^{-1}}(K_G)) \subseteq \varphi_g(K_G)$.
(c) Sei G abelsch. Dann ist $K_G = \langle \{aba^{-1}b^{-1} : a, b \in G\} \rangle = \langle \{e : a, b \in G\} \rangle = \langle \{e\} \rangle = \{e\}$.

Sei Umgekehrt $K_G = \{e\}$. Dann ist für $a, b \in G$ gerade $aba^{-1}b^{-1} \in K_G = \{e\}$, also $aba^{-1}b^{-1} = e$, also $ab = ba$.

Aufgabe 26.

Seien U und V beide K -Vektorräume. Eine Abbildung $f: U \rightarrow V$ heißt *linear* oder *Vektorraumhomomorphismus*, falls $\forall u, v \in U (f(u+v) = f(u) + f(v))$ und $\forall v \in U \forall \alpha \in K (f(\alpha v) = \alpha f(v))$.

- (a) Man beweise für U, V, W alle K -Vektorräume und $f: U \rightarrow V$ und $g: V \rightarrow W$ linear, daß $g \circ f$ linear ist.

Für eine lineare Abbildung $f: U \rightarrow V$ und $\alpha \in K$ setzt man $(\alpha f): U \rightarrow V, u \mapsto \alpha f(u)$.

- (b) Man zeige, daß αf eine lineare Abbildung ist.
(c) Man zeige, daß $(\alpha f) \circ g = \alpha(f \circ g) = f \circ (\alpha g)$.
(d) Man gebe ein Beispiel für einen Vektorraum V und lineare Abbildungen $f, g: V \rightarrow V$ an, mit $f \circ g \neq g \circ f$.

Lösungshinweise.

(d) $V = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x, 0)$, $g(x, y) = (y, x)$

Aufgabe 27.

Seien U, V K -Vektorräume und $f: U \rightarrow V$ linear. Man beweise.

- (a) $\text{Im}(f) := f(U)$ ist Untervektorraum von V .
- (b) $\text{Ke}(f) := \{u \in U : f(u) = 0\}$ ist Untervektorraum von U .
- (c) f ist injektiv genau dann, wenn $\text{Ke}(f) = \{0\}$.

Lösungshinweise.

- (c) Ist f injektiv, so ist offenbar $\text{Ke}(f) = \{0\}$; sei andererseits $\text{Ke}(f) = \{0\}$ und $x, y \in U$ mit $f(x) = f(y)$. Dann $0 = f(x) - f(y) = f(x - y)$, also $x - y = 0$.

Aufgabe 28. (Doppeldualraum, Teil 1)

Sei V ein K -Vektorraum.

- (a) Man zeige, daß $V^* := \text{Hom}(V, K) := \{f: V \rightarrow K \mid f \text{ linear}\}$ ein Vektorraum mit komponentenweiser Addition und Multiplikation ist (dh mit $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$ und $(\alpha f)(v) = \alpha f(v)$).

Bemerkung: V^* heißt der “Dualraum” zu V .

- (b) Nach (a) ist also auch $V^{**} = (V^*)^*$ ein Vektorraum, der sogenannte “Doppeldualraum”. Man zeige, daß die Auswerteabbildung $\text{ev}: V \rightarrow V^{**}$, gegeben durch

$$\text{ev}(v)(f) = f(v)$$

ein Vektorraumhomomorphismus ist.

Lösungshinweise.

- (a) Wir zeigen, daß $\text{Hom}(V, K) \subset K^V$ ein Untervektorraum ist.

Seien also $f, g \in V^*$, $v, w \in V$ und $\alpha, \beta, \gamma \in K$. Dann ist $(f+g)(\alpha v + \beta w) = f(\alpha v + \beta w) + g(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w) + \alpha g(v) + \beta g(w) = \alpha((f+g)(v)) + \beta((f+g)(w))$ und $(\gamma f)(\alpha v + \beta w) = \gamma f(\alpha v + \beta w) = \gamma(\alpha f(v) + \beta f(w)) = \alpha \gamma f(v) + \beta \gamma f(w) = \alpha(\gamma f)(v) + \beta(\gamma f)(w)$.

- (b) Seien $u, v \in V$ und $\alpha, \beta \in K$. Zu zeigen ist $\text{ev}(\alpha v + \beta w) = \alpha \text{ev}(v) + \beta \text{ev}(w)$. Zwei Abbildungen sind gleich, wenn sie auf allen Elementen gleich sind. Sei also $f \in V^*$. Dann ist $\text{ev}(\alpha v + \beta w)(f) = f(\alpha v + \beta w) = \alpha f(v) + \beta f(w) = \alpha \text{ev}(v)(f) + \beta \text{ev}(w)(f)$.