Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Wintersemester 2009/10
Blatt 6

Übungen zu "Lineare Algebra I"

Aufgabe 21.
Man bestimme (bis auf Isomorphie) alle Gruppen mit genau 4 Elementen.

Lösungshinweise.
Sei $G = \{e, a, b, c\}$ eine Gruppe mit neutralem Element e. Es geht darum, die möglichen Gruppentafeln aufzustellen. Aus der neutralität von e ergibt sich das folgende.

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a			
b	b			
c	c			

Da G eine Gruppe ist muß jedes Element ein inverses haben. Wir unterscheiden je nach dem es ein von e verschiedenes Element gibt, das sein eigenes Inverses ist.

Fall $\forall x \neq e. x^{-1} \neq x$. Dann ist insbesondere $a^{-1} \neq q$ und ohne Einschränkung $a^{-1} = b$, da wir über b und c noch keine Annahmen gemacht haben. Es ergibt sich folgendes.

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a		e	
b	b	e		
c	c			

Aus der Forderung, daß jedes Element in jeder Zeile und Spalte genau einmal vorkommen muß ergibt sich $c^2 = e$, also $c^{-1} = c$ im Widerspruch zur Annahme des Fall.

Fall $\exists x \neq e. x^{-1} = x$. Ohne Einschränkung gilt dann $a^{-1} = a$.

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e		
b	b			
c	c			

Da G eine Gruppe ist, muß auch b ein Inverses haben. Aus der Forderung, daß in der Gruppentafel jedes Element in jeder Zeile und jeder Spalte genau einmal vorkommen muß bleiben nur noch b und c als mögliche Inverse von b.

Unterfall $b^{-1} = b$.

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e		
b	b		e	
c	c			

Aus der Forderung, daß jedes Element in jeder Zeile und jeder Spalte genau einmal vorkommen muß ergibt sich der Rest zwingend.

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Wir sehen, daß

$$G \cong \{\mathrm{id}, (12), (34), (12)(34)\} \subset S_4$$

Diese Gruppe wird auch "Diedergruppe D_2" oder "Kleinsche Vierergruppe" genannt.

Unterfall $b^{-1} = c$.

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e		
b	b			e
c	c		e	

Auch hier ergibt sich der Rest zwingend.

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

Wir sehen, daß

$$G \cong \{\mathrm{id}, (1234), (1234)^2, (1234)^3\} \subset S_4$$

Diese Gruppe wird auch "Zyklische Gruppe C_4" genannt.

Aufgabe 22.
Sei G eine Gruppe. Es ist $\mathrm{Aut}(G) = \{g\colon G \to G \mid g \text{ ist Gruppenisomorphismus}\}$ offenbar eine Untergruppe von $\subseteq S(G)$, die sogenannte "Automorphismengruppe".

Man zeige daß $\varphi\colon G \to \mathrm{Aut}(G), a \mapsto \varphi_a$ ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist, wobei $\varphi_a\colon G \to G, b \mapsto aba^{-1}$. (Insbesondere ist also auch $\varphi_a \in \mathrm{Aut}(G)$ zu zeigen).

Ferner gebe man eine Gruppe G an, bei der φ nicht injektiv ist.

Lösungshinweise.
Für $g \in G$ sei $\pi_g\colon G \to G$ definiert durch $\pi_g(f) = gfg^{-1}$. Es ist insbesondere zu zeigen, daß $\pi_g \in \mathrm{Aut}(G)$. Da π_g offensichtlich bijektiv (mit Umkehrabbildung $\pi_{g^{-1}}$) genügt es zu zeigen, daß π_g ein Gruppenhomomorphismus ist. In der Tat, $\pi_g(ff') = gff'g^{-1} = gfg^{-1}gf'g^{-1} = \pi_g(f)\pi_g(f')$.

Ferner ist noch zu zeigen, daß $\pi_{gh} = \pi_g \circ \pi_h$. Sei also $f \in G$. Dann ist $(\pi_g \circ \pi_h)(f) = \pi_g(\pi_h(f)) = \pi_g(hfh^{-1}) = ghfh^{-1}g^{-1} = ghf(gh)^{-1} = \pi_{gh}(f)$.

Bemerkung: Automorphismen der Form π_g heiß "Innere Automorphismen" von G.

Ist G eine abelsche Gruppe, so ist offenbar die Identität der einzige innere Automorphismus. Insbesondere ist die Abbildung $g \mapsto \pi_g$ *nicht* injektiv, falls G mehr als zwei Elemente hat. $(\mathbb{Z}, +, 0)$ ist ein solches Beispiel.

Das Beispiel $(\mathbb{Z}, +, 0)$ zeigt auch, daß nicht alle Automorphismen inner sind. Etwa ist $x \mapsto -x$ ein Automorphismus von $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 23.
Seien G, H Gruppen und $f\colon G \to H$ Gruppenhomomorphismus.

Man beweise die folgenden Aussagen.

(a) $\mathrm{Im}(f) := f(G) \subseteq H$ ist eine Untergruppe.
(b) $\mathrm{Ke}(f) := \{g \in G : f(g) = e\} \subseteq G$ ist eine Untergruppe.

(c) $\mathrm{Ke}(f)$ ist invariant unter inneren Automorphismen, d.h., für $a \in G$ und $\varphi_a \colon G \to G, b \mapsto aba^{-1}$ ist $\varphi_a(\mathrm{Ke}(f)) = \mathrm{Ke}(f)$.

Lösungshinweise.

(a) Es ist $e = f(e) \in \mathrm{Im}(f)$. Seien $a, b \in \mathrm{Im}(f)$, dann gibt es $x, y \in G$ mit $f(x) = a$ und $f(y) = b$. Dann ist $a^{-1} = f(x^{-1}) \in \mathrm{Im}(f)$ und $ab = f(x)f(y) = f(xy) \in \mathrm{Im}(f)$.
(b) Es ist $f(e) = e$, also $e \in \mathrm{Ke}(f)$. Seien $a, b \in \mathrm{Ke}(f)$, dann ist auch $f(ab) = f(a)f(b) = ee = e$, also $ab \in \mathrm{Ke}(f)$, und $f(a^{-1}) = f(a)^{-1} = e^{-1} = e$, also $a^{-1} \in \mathrm{Ke}(f)$.
(c) Sei $b \in \mathrm{Ke}(f)$ und $a \in G$. Dann ist $f(aba^{-1}) = f(a)f(b)f(a)^{-1} = f(a)ef(a)^{-1} = f(a)f(a)^{-1} = e$, also sit $aba^{-1} \in \mathrm{Ke}(f)$. Damit ist $\varphi_a(\mathrm{Ke}(f)) \subseteq \mathrm{Ke}(f)$ gezeigt; die andere Inklusion folgt durch anwenden von $\varphi_{a^{-1}}$.

Aufgabe 24.
Sei $(V, +)$ abelsche Gruppe. Wir betrachten die Menge aller $f \colon V \to V$ die Gruppenhomomorphismen sind. Auf dieser Menge definieren wir durch $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$ und $(f \circ g)(v) = f(g(v))$ zwei Verknüpfungen.

Man zeige, daß die Menge aller Gruppenhomomorphismen von V nach V mit diesen Verknüpfungen einen Ring mit Identität als Einselement bilden. Außerdem gebe man (mit Beweis!) ein $(V, +)$ an, für das dieser Ring nicht kommutativ ist.

Lösungshinweise.
Man überzeugt sich zunächst, dass auch $f + g$ und $f \circ g$ wieder Gruppenhomomorphismen sind.

Die Assoziativität der Addition und Multiplikation sieht man leicht, ebenso, daß die Identität Einselement ist. Seien nun f, g, h Gruppenhomorphismen und $v \in V$. Dann ist $((f+g)\circ h)(v) = (f+g)(h(v)) = f(h(v))+g(h(v)) = (f\circ h+g\circ h)(v)$. Ferner $(f\circ(g+h))(v) = f((g+h)(v)) = f(g(v)+h(v)) = f(g(v))+f(h(v)) = (f\circ g+f\circ h)(v)$.

Um zu sehen, daß der so entstandene Ring nicht immer kommutativ ist, betrachte man $V = \mathbb{R}^2$ mit der üblichen Addition. Für $f(x, y) = (x, 0)$ und $g(x, y) = (y, x)$ sind $f \circ g$ und $g \circ f$ verschieden; beispielsweise unterscheiden sie sich an der Stelle $(1, 0)$.

Abgabetermin. Montag, 30.11.2009, 12hct im Übungskasten.