Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Wintersemester 2009/10
Blatt 5

Übungen zu "Lineare Algebra I"

Aufgabe 17. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, wie der Begriffe Gruppe anders definiert werden kann — und wie nicht.

(a) Es sei G eine Menge und $\circ\colon G \times G \to G$ eine Abbildung, infix geschrieben. Es sei $e \in G$ und für alle x, y, z gelte

$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$	Assoziativität
$x \circ e = x$	rechts-neutrales Element
$\exists x'(x \circ x' = e)$	rechts-inverses Element

Man zeige, daß G eine Gruppe ist.

Hinweis: um beispielsweise $e \circ x = x$ zu zeigen, kann es hilfreich sein, zunächst $e \circ x \circ x' = x \circ x'$ für ein geeignetes x' zu zeigen. Man überlege sich, warum dies genügt.

(b) Man gebe eine Menge G mit einer Abbildung $\circ\colon G \times G \to G$ und einem Element $e \in G$ an, so daß für alle x, y und z gilt

$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$	Assoziativität
$x \circ e = x$	rechts-neutrales Element
$\exists x'(x' \circ x = e)$	links-inverses Element

aber G *keine* Gruppe ist.

Hinweis: betrachte die Verknüpfung $x \circ y := x$.

Lösungshinweise.

(a) Wir müssen zeigen, daß e auch links-neutral ist und es es links-inverse Elemente gibt.

Sei also $x \in G$. Wir müssen zeigen $e \circ x = x$. Wir verwenden Assoziativität stets stillschweigend. Sei x' das rechts-inverse zu x. Dann gilt $e \circ x \circ x' = e \circ e = e$, wobei wir die rechts-Neutralität(!) von e verwendet haben. Ferner $x \circ x' = e$, also $e \circ x \circ x' = x \circ x'$. Sei x'' das rechts-Inverse zu x'. Dann folgt aus obiger Gleichung $e \circ x \circ x' \circ x'' = x \circ x' \circ x''$. Die linke Seite ist aber $e \circ x \circ x' \circ x'' = e \circ x \circ e = e \circ x$ und die Rechte Seite ist $x \circ e = x$.

Sei $x \in G$ und x' das rechtsinverse zu x. Wir zeigen, daß x' auch linksinvers ist. Es ist $x' \circ x \circ x' = x' \circ e = x'$. Wir multiplizieren beide Seiten von rechts mit dem rechts-Inversen x'' von x' und erhalten $x' \circ x \circ x' \circ x'' = x' \circ x'' = e$. Andererseits ist die linke Seite aber $x' \circ x \circ x' \circ x'' = x' \circ x \circ e = x' \circ x$.

(b) Sei $G = \{a, b\}$ eine zwei-Elementige Menge. Definiere $x \circ y := x$. Dann ist $\circ$ assoziativ, denn $x \circ (y \circ z) = x = x \circ y = (x \circ y) \circ z$. Ferner ist a (oder auch b) rechts-neutral, denn $x \circ a = x$. Außerdem ist a auch das links-inverse, denn $a \circ x = a$.

Aber $(G, \circ, a)$ ist keine Gruppe, denn b hat kein rechts-inverses, denn $b \circ x = b \neq a$.

Aufgabe 18. Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe und I eine Menge. Mit $G^I = \{f\colon I \to G \mid f \text{ Abbildung}\}$ bezeichnen wir die Menge aller Abbildungen von I nach G. Auf G^I wird durch $(f \cdot g)(i) = f(i) \cdot g(i)$ eine Verknüpfung $\cdot$ definiert.

Bemerkung: auch wenn es für diese Aufgabe nicht benötigt ist, dürfen sie $I \neq \emptyset$ voraussetzen; damit erübrigen sich Fragen zum Status einer Funktion mit leerem Definitionsbereich.

Man zeige.

(a) G^I ist eine Gruppe.
(b) Ist G abelsch, so auch G^I.
(c) $G^{(I)} \subseteq G^I$ ist eine Untergruppe. Dabei ist $G^{(I)} = \{f\colon I \to G \mid |\{i \in I : f(i) \neq e\}| < \infty\}$ die Menge aller derjenigen Abbildungen von I nach G, die nur an endlich vielen Stellen von e verschieden sind.

Bemerkung: eine Untergruppe einer Gruppe ist eine Teilmenge der Gruppe, die das neutrale Element enhält und abgeschlossen unter Multiplikation und Inversenbildung ist.

Lösungshinweise.

(a) Wir müssen Assoziativität, so wie die Existenz rechts-neutraler und rechts-inverser Elemente zeigen (vgl. Aufgabe 6).
  - Assoziativität. Seien $f, g, h \in G^I$. Wir zeigen $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$. Da es sich hierbei um Abbildungen handelt, müssen wir die Gleichheit auf jedem Element des Definitionsbereichs zeigen. Sei also $i \in I$. Dann ist $((f \cdot g) \cdot h)(i) = (f \cdot g)(i) \cdot h(i) = (f(i) \cdot g(i)) \cdot h(i) = f(i) \cdot (g(i) \cdot h(i)) = f(i) \cdot (g \cdot h)(i) = (f \cdot (g \cdot h))(i)$.
  - Neutrales Element. Setze $E\colon I \to G, i \mapsto e$ als die Abbildung die konstant e ist. Wir zeigen für $f \in G^I$, daß $f \cdot E = f$ gilt. Sei also wieder $i \in I$. Dann gilt $(f \cdot E)(i) = f(i) \cdot E(i) = f(i) \cdot e = f(i)$.
  - Inverse Elemente. Sei $f \in G^I$. Setze $g\colon I \to G, i \mapsto (f(i))^{-1}$ als das punktweise Inverse von f. Wir zeigen $f \cdot g = E$. Sei also wieder $i \in I$. Dann ist $(f \cdot g)(i) = f(i) \cdot g(i) = f(i) \cdot (f(i))^{-1} = e = E(i)$.

(b) Sei G abelsch und $f, g \in G^I$. Wir zeigen $f \cdot g = g \cdot f$. Sei also $i \in I$. Dann ist $(f \cdot g)(i) = f(i) \cdot g(i) = g(i) \cdot f(i) = (g \cdot f)(i)$.

(c) Für $f \in G^I$ sei $\operatorname{supp}(f) = \{i \in I \mid f(i) \neq e\}$ der Träger, also diejenigen Elemente von I an denen f nicht trivial ist.

Es ist $\operatorname{supp}(E) = \emptyset$, also insbesondere endlich. Um zu zeigen, daß die Gesamtheit der Elemente von G^I mit endlichem Träger eine Untergruppe bilden müssen wir also noch zeigen, daß sie unter Produkt und Inversenbildung abgeschlossen sind. Dazu genügt es zu zeigen, daß $\operatorname{supp}(f \cdot g) \subseteq \operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(g)$ und $\operatorname{supp}(f^{-1}) \subseteq \operatorname{supp}(f)$, denn die Vereinigung endlicher Mengen ist wieder endlich.

Wir argumentieren indirekt und nehmen an, $i \notin \operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(g)$. Dann ist also $i \notin \operatorname{supp}(f)$, also $f(i) = e$ und $i \notin \operatorname{supp}(g)$, also $g(i) = e$. Dann aber auch $(f \cdot g)(i) = f(i) \cdot g(i) = e \cdot e = e$, also $i \notin \operatorname{supp}(f \cdot g)$.

Ebenso folgt aus $i \notin \operatorname{supp}(f)$ daß $f(i) = e$, dann aber auch $f^{-1}(i) = (f(i))^{-1} = e^{-1} = e$, also $i \notin \operatorname{supp}(f^{-1})$.

Aufgabe 19. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, daß die Untergruppen der Symmetrischen Gruppen "im wesentlichen" alle Gruppen sind.

Sei G Gruppe. Für $g \in G$ sei $\lambda_g \colon G \to G$, $h \mapsto gh$ die Linksmultiplikation.

(a) Man zeige $\lambda_g \in S(G)$. Mit anderen Worten, man zeige, daß λ_g eine Bijektion ist.

Nun setzt man $\lambda \colon G \to S(G)$, $g \mapsto \lambda_g$.

(b) $\lambda(e) = \mathrm{id}_G$
(c) $\lambda(gh) = \lambda(g) \circ \lambda(h)$
(d) λ ist injektiv.

Bemerkung: (b)–(d) sagen, daß λ injektiver Gruppenhomomorphismus von G nach $S(G)$ ist. Mit anderen Worten, vermöge λ kann G als Untergruppe der symmetrischen Gruppe $S(G)$ aufgefaßt werden.

Lösungshinweise.

(a) Sei $g \in G$. Dann gilt für beliebiges $h \in G$ gerade $(\lambda_g \circ \lambda_{g^{-1}})(h) = gg^{-1}h = h$, also $\lambda_g \circ \lambda_{g^{-1}} = \mathrm{id}_G$. Ebenso $\lambda_{g^{-1}} \circ \lambda_g = \mathrm{id}_G$. Es folgt die Behauptung.
(b) $\lambda(e)(g) = \lambda_e(g) = eg = g = \mathrm{id}_G(e)$
(c) Seien $g, h \in G$ mit $\lambda(g) = \lambda(h)$. Dann ist auch $\lambda(g)(e) = \lambda(h)(e)$, also $g = eg = eh = h$.

Aufgabe 20. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Man zeige, daß $(\{x \in \mathbb{R}^m : Ax = 0\}, +, 0)$ eine abelsche Gruppe ist.

Lösungshinweise.
Assoziativität und kommutativität der Addition in $\mathbb{R}^m$ wurde bereits gezeigt. Ebenso wurde gezeigt, dass $0 \in \mathbb{R}^m$ neutrales Element ist und in der Tat gilt $A0 = 0$.

Die Addition auf $\{x \in \mathbb{R}^m : Ax = 0\}$ ist auch wohldefiniert, denn aus $Ax = 0$ und $Ay = 0$ folgt $0 = 0 + 0 = Ax + Ay = A(x + y)$. Ferner ist zu jedem x auch $-x$ in $\{x \in \mathbb{R}^m : Ax = 0\}$, denn aus $Ax = 0$ folgt $A(-x) = 0$.

Abgabetermin. Montag, 23.11.2009, 12hct im Übungskasten.