MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Wintersemester 2009/10
Blatt 4

Übungen zu "Lineare Algebra I"

Aufgabe 13. (Binomischer Lehrsatz)
Ist n eine natürliche Zahl so bezeichnen wir mit $n!$ das Produkt der Zahlen 1 bis n, also

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

Mit anderen Worten $0! = 1$, $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

Die Binominialkoeffizienten $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ sind wie folgt definiert.

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man zeige das folgende.

(a) Es gilt

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$$

(b) Sind A und B quadratische Matrizen mit $AB = BA$, so gilt

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} A^k B^{n-k}$$

Bemerkung: die in (b) bewiesene Formel wird auch als "binomische Formel" bezeichnet.

Lösungshinweise.

(a) Für $0 \leq k < n$ sieht man

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$$

$$\frac{n! \cdot (k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n! \cdot (n-k)}{(k+1)!(n-k)!} =$$

$$\frac{n! \cdot (k+1) + n! \cdot (n-k)}{(k+1)!(n-k)!} =$$

$$\frac{n! \cdot (n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$$

Für $k < 0$ stehen links und rechts jeweils 0, ebenso für $k > n$. Für $k = n$ ergibt sich die linke Seite zu $1 + 0$ und die rechte zu 1.

(b) Induktion nach n. Der Fall $n = 0$ ist klar (beide seiten sind die Einheitsmatrix).

Fall $n > 0$. Es ist

$$(A+B)^n =$$

$$(A+B)(A+B)^{n-1} =$$

$$(A+B)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}A^kB^{n-1-k} =$$

$$A\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}A^kB^{n-1-k} + B\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}A^kB^{n-1-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}A^{k+1}B^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}A^kB^{n-k} =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}A^kB^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k}A^kB^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k-1}A^kB^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{k}A^kB^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}\right]A^kB^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}$$

Aufgabe 14.

Seien A und B Mengen und $f\colon A \to B$ ein Funktion. Es bezeiche f^{-1} die Urbildfunktion, also $f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}$ für $Y \subseteq B$. Ferner ist für $X \subseteq A$ die Schreibweise $f(X)$ definiert als $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$.

Man beweise für $M, N \subseteq B$ und $X, Y \subseteq A$.

(a) $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$
(b) $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$
(c) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$
(d) Es gibt A und B Mengen, $f\colon A \to B$ Funktion, sowie $X, Y \subseteq A$ mit $f(X \cap Y) \neq f(X) \cap f(Y)$.

Lösungshinweise.

(a) "$\subseteq$". Sei $x \in f^{-1}(M \cup N)$. Dann ist $f(x) \in M \cup N$, also $f(x) \in M$ oder $f(x) \in N$. Dann ist aber $x \in f^{-1}(M)$ oder $x \in f^{-1}(N)$, also $x \in f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$.

"$\supseteq$". Sei $x \in f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$. Dann $x \in f^{-1}(M)$ oder $f^{-1}(N)$, und damit $f(x) \in M$ oder $f(x) \in N$, also $f(x) \in M \cup N$. Damit ist aber $x \in f^{-1}(M \cup N)$.

(b) "$\subseteq$". Sei $x \in f^{-1}(M \cap N)$. Dann ist $f(x) \in M \cap N$, also $f(x) \in M$ und $f(x) \in N$. Dann ist aber $x \in f^{-1}(M)$ und $x \in f^{-1}(N)$, also $x \in f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$.

"$\supseteq$". Sei $x \in f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$. Dann $x \in f^{-1}(M)$ und $f^{-1}(N)$, und damit $f(x) \in M$ und $f(x) \in N$, also $f(x) \in M \cap N$. Damit ist aber $x \in f^{-1}(M \cap N)$.

(c) "$\subseteq$". Sei $y \in f(M \cup N)$. Dann gibt es also ein $x \in M \cup N$ mit $f(x) = y$. Ist $x \in M$, so ist $y = f(x) \in f(M) \subseteq f(M) \cup f(N)$. Ist andererseits $x \in N$, so ist $y = f(x) \in f(N) \subseteq f(M) \cup f(N)$.

"$\supseteq$". Wir zeigen $f(M) \subseteq f(M \cup N)$; die Inklusion $f(N) \subseteq f(M \cup N)$ geht genau so. Sei also $y \in f(M)$. Dann gibt es $x \in M$ mit $f(x) = y$. Da dann aber auch $x \in M \cup N$, denn $M \subseteq M \cup N$, gilt auch $y = f(x) \in f(M \cup N)$.

(d) Wir können beispielsweise $A = \{0, 1\}$, $B = \{0\}$, $f \colon A \to B$ mit $f(0) = f(1) = 0$, $X = \{0\}$, $Y = \{1\}$ wählen. Dann ist naemlich $f(X \cap Y) = f(\emptyset) = \emptyset$, aber $f(X) \cap f(Y) = \{0\} \cap \{0\} = \{0\} \neq \emptyset$.

Aufgabe 15.
Für $\mathcal{M}$ eine Menge von Mengen definiert man die Vereinigung als

$$\bigcup \mathcal{M} = \{x : \exists A \in \mathcal{M}\ x \in A\}$$

(a) Man zeige $\bigcup\{A, B\} = A \cup B$.
(b) Man zeige für $\bigcup \mathcal{M} \subseteq X$, $f \colon X \to Y$ Abbildung daß

$$f(\bigcup \mathcal{M}) = \bigcup\{f(A)\ :\ A \in \mathcal{M}\}$$

Lösungshinweise.

(a) Sei $x \in \bigcup\{A, B\}$. Also gibt es $y \in \{A, B\}$ mit $x \in y$. Also $x \in A \vee x \in B$. Also $x \in A \cup B$.

Sei $x \in A \cup B$. Dann $x \in A \vee x \in B$. Also gibt es $y \in \{A, B\}$ mit $x \in y$. Also $x \in \bigcup\{A, B\}$.

(b) Sei $y \in f[\bigcup \mathcal{M}]$. Dann ist $y = f(a)$ für ein $a \in \bigcup \mathcal{M}$. Also gibt es $A \in \mathcal{M}$ mit $a \in A$. Dann ist aber $y = f(a) \in f[A]$, also $f(a) \in \bigcup\{f[A]\ :\ A \in \mathcal{M}\}$.

Sei andererseits $y \in \bigcup\{f[A]\ :\ A \in \mathcal{M}\}$. Dann gibt es $A \in \mathcal{M}$ mit $y \in f[A]$. Also $y = f(a)$ für ein $a \in A$. Es ist also $a \in A \in \mathcal{M}$, also $a \in \bigcup \mathcal{M}$, also $y = f(a) \in f[\bigcup \mathcal{M}]$.

Aufgabe 16. (Kategorische Beschreibung von Injektivität)
Sei $f \colon Y \to Z$ Abbildung. Man beweise

> f ist genau dann injektiv, wenn für jede Menge X und alle Abbildungen $g, g' \colon X \to Y$ gilt: $f \circ g = f \circ g' \ \Rightarrow\ g = g'$.

Lösungshinweise.
Seien f injektiv, $g, g' \colon Z \to Y$ mit $f \circ g = f \circ g'$. Wir zeigen $g = g'$. Sei also $x \in X$. Wir müssen zeigen $g(x) = g'(x)$. Wegen $f \circ g = f \circ g'$ gilt aber $f(g(x)) = f(g'(x))$, also wegen f injektiv $g(x) = g'(x)$.

Hier verwendeten wir, daß "f injektiv" auch als "$\forall y, y'.(f(y) = f(y') \Rightarrow y = y')$" formuliert werden kann, was einfach die Kontraposition der in der Vorlesung angegebenen Definiton "$\forall y, y'.(y \neq y' \Rightarrow f(y) \neq f(y'))$" ist.

Gelte für alle Abbildungen $g, g' \colon X \to Y$ daß $f \circ g = f \circ g' \;\Rightarrow\; g = g'$. Wir zeigen, daß f injektiv ist. Seien also $y, y' \in Y$ mit $f(y) = f(y')$. Setze $X = 1 = \{0\}$ und definierge $g, g' \colon 1 \to Y$ druch $g(0) = y$ und $g'(0) = y'$. Dann ist $f(g(0)) = f(y) = f(y') = f(g'(0))$, also $f \circ g = f \circ g'$. Nach Vorraussetzung ist also $g = g'$, insbesondere $y = g(0) = g'(0) = y'$.

Abgabetermin. Montag, 16.11.2009, 12hct im Übungskasten.