

Übungen zu “Lineare Algebra I”

Aufgabe 9. (Invertieren von 2×2 -Matrizen)

Für welche Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

existiert eine Matrix

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$$

derart, daß $AX = E$ gilt? Wie lauten im Fall, daß so ein X existiert dessen Einträge x, y, z, u in Abhängigkeit von a, b, c, d ?

Bemerkung: Wie bei allen Mathematischen Übungsblättern ist die Richtigkeit Ihrer Antwort selbverständlich zu beweisen.

Lösungshinweise.

$AX = E$ ist äquivalent zu

$$\begin{array}{rcl} ax + bz & = & 1 \\ cx + dz & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} ay + bu & = & 0 \\ xy + dz & = & 1 \end{array}$$

Sei $D = ad - bc$. Dann erhalten wir aus obigen Gleichungssystem $Dx = d$ und $Dy = -b$. Wäre nun $D = 0$, so also auch d und b . Wegen $ax + bz = 1$ gilt dann $x \neq 0$, was wegen $cx + dz = 0$ zur Folge hat, daß $c = 0$. Aber $c = d = 0$ widerspricht $cy + du = 1$. Also impliziert die Existenz eines X mit $AX = E$, daß $D \neq 0$.

Ist $D \neq 0$, so liefert $x = d/D$, $y = -b/D$, $z = -c/D$, $u = a/D$ eine Matrix X mit $AX = E$. Also impliziert $D \neq 0$ die Existenz eines X mit $AX = E$.

Aufgabe 10. (Invertierbarkeit von $E - A$ für nilpotentes A)

- (a) Es sei $A = (\delta_{i+1,j})_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, daß es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $A^k = 0$.
- (b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig, so daß für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt, daß $A^k = 0$. Zeigen Sie, daß es ein $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt mit $(E - A)X = E$.

Hinweis: betrachte die geometrische Reihe $\sum_i A^i$.

Lösungshinweise.

- (a) Wir zeigen durch Induktion nach k , daß $A^k = (\delta_{i+k,j})_{i,j}$. Dann ist offenbar $A^k = 0$ für $k \geq n$.
- (b) Sei $X = \sum_i A^i = \sum_{i=0}^{k-1} A^i$. Dann ist $(E - A)X = \sum_{i=0}^{k-1} A^i - \sum_{i=0}^{k-1} A^{i+1} = A^0 - A^k = E - 0 = E$.

Aufgabe 11. (Nilpotente 2×2 -Matrizen)

Man bestimme alle $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $A^2 = 0$.

Lösungshinweise.

Die Matrix A hat die Form $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Man berechnet nun

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = 0$$

Das ergibt die Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + bc = 0 \\ bc + d^2 = 0 \end{array} \right\} \implies a^2 - d^2 = 0 \implies a^2 = d^2 \implies a = \pm d$$

und

$$\begin{array}{l} ab + bd = 0 \implies b(a + d) = 0 \\ ac + cd = 0 \implies c(a + d) = 0 \end{array}$$

Nun unterscheidet man die Fälle $a = +d$ und $a = -d$.

Ist $a = +d$ so hat man $b \cdot 2a = 0$ und $c \cdot 2a = 0$. Falls nun $a \neq 0$, so folgt $b = 0$ und $c = 0$ und damit folgt aus der Gleichung $a^2 + bc = 0$, daß $a = 0$. Dieser Fall kann also nicht auftreten. Falls aber $a = 0$ so ist auch $d = 0$ und aus $a^2 + bc = 0$ folgt $bc = 0$ und somit muß auch b oder c Null sein.

Die Matrix A hat dann die Form $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ mit $b, c \in \mathbb{R}$.

Nun betrachten wir den Fall $a = -d$. Die Gleichungen $b(a + d) = 0$ und $c(a + d) = 0$ sind dann für beliebige $b, c \in \mathbb{R}$ erfüllt. Aus $a^2 + bc = 0$ folgt noch $a = \pm\sqrt{-bc}$. b und c müssen also auch verschiedene Vorzeichen haben, damit $-bc \geq 0$.

Die Matrix A hat dann die Form $\begin{pmatrix} \pm\sqrt{-bc} & b \\ c & \mp\sqrt{-bc} \end{pmatrix}$ mit $b, c \in \mathbb{R}$ mit $bc \leq 0$.

Aufgabe 12.

- (a) Man beweise für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \iff AB = BA.$$

- (b) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Man zeige: $AB = BA$.

Lösungshinweise.

- (a) Eine Äquivalenz wird fast immer in zwei Schritten bewiesen: $\implies$ von links nach rechts und $\impliedby$ von rechts nach links.

$\implies$ Nehmen wir an es gelte $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ dann folgt durch ausmultiplizieren der linken Seite unter Verwendung des Distributivgesetzes $A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Durch Subtraktion von A^2 , B^2 und AB auf beiden Seiten der Gleichung bekommt man daraus $BA = AB$. Was zu zeigen war.

$\Leftarrow$ Nehmen wir an es gelte $AB = BA$. Dann rechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned}(A + B)^2 &= (A + B) \cdot (A + B) \\ &= AA + AB + BA + BB \\ &= A^2 + AB + AB + B^2 && \text{wegen } BA = AB \\ &= A^2 + 2AB + B^2\end{aligned}$$

Was zu zeigen war.

(b) Man rechnet unter Verwendung der Kommutativität in $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ca - db & -cb - da \\ cb + da & ca - db \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Abgabetermin. Montag, 9.11.2009, 12hct im Übungskasten.