Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Wintersemester 2009/10
Blatt 2

Übungen zu "Lineare Algebra I"

Aufgabe 5.
Man bestimme alle $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Lösungshinweise.
Man betrachtet zuerst einmal

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & \cdot & \cdot \\ y & \cdot & \cdot \\ z & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1x + 0y + 1z & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2}y + 2z & \cdot & \cdot \\ 2z & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Man sieht, daß die zweite und dritte Spalte von X für die erste Spalte des Produkts gar keine Rolle spielt. Durch Gleichsetzen erhält man:

$$\begin{pmatrix} -1x + 1z & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2}y + 2z & \cdot & \cdot \\ 2z & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

und so die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} -1x + 1z &= 2 \\ \frac{1}{2}y + 2z &= -1 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen löst man bequem durch Einsetzen von unten nach oben und man erhält $z = 2, y = -10, x = 0$. Die Tatsache, daß in der linken Matrix unterhalb der Diagonalen nur Nullen stehen—so eine Matrix heiß oberer Dreiecksmatrix—macht das Auflösen dieser Gleichungen besonders leicht. Auch kann man die gesuchte Matrix X offensichtlich spaltenweise berechnen. Man wiederholt also das gleiche Verfahren für die zweite und dritte Spalte. Das Ergebnis lautet

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -10 & -4 & -12 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6.
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

(a) Man berechne A^3.
(b) Man berechne A^{2009}.

Lösungshinweise.

(a) Man berechnet

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$$

und schließlich $A^3 = E$.

(b) Es ist $A^{2006} = A^{669\cdot 3+2} = (A^3)^{669} A^2 = A^2$ und der Wert von A^2 wurde bereits in (a) berechnet.

Aufgabe 7. (Kommutator und Jacobi-Identität)
Wir definieren für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ den Kommutator $[A, B]$ wie folgt.

$$[A, B] := AB - BA.$$

Man beweise

(a) $[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$ für alle $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
(b) $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$ für alle $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Lösungshinweise.
Man rechnet

$$\begin{aligned}
[A + B, C] &= (A + B)C - C(A + B) && \text{Definition des Kommutators} \\
&= AC + BC - CA - CB && \text{Distrutivität} \\
&= AC - CA + BC - CB && \text{Kommutativität von } + \\
&= [A, C] + [B, C] && \text{Definition des Kommutators}
\end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}
&[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = \\
&\quad = [AB - BA, C] \\
&\qquad +[BC - CB, A] \\
&\qquad +[CA - AC, B] && \text{Definition des Kommutators} \\
&\quad = (AB - BA)C - C(AB - BA) \\
&\qquad +(BC - CB)A - A(BC - CB) \\
&\qquad +(CA - AC)B - B(CA - AC) && \text{Definition des Kommutators} \\
&\quad = ABC - BAC - CAB + CBA \\
&\qquad +BCA - CBA - ABC + ACB \\
&\qquad +CAB - ACB - BCA + BAC && \text{Distrutivität} \\
&\quad = ABC - ABC + CBA - CBA \\
&\qquad +BCA - BCA + ACB - ACB \\
&\qquad +CAB - CAB + BAC - BAC && \text{Kommutativität von } + \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

Aufgabe 8. (Zentrum des Matrizenrings)
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie daß folgende Aussagen äquivalent sind.

(a) Für alle $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $AB = BA$.
(b) Es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so daß $A = \lambda E$.

Lösungshinweise.
Zu "(a) $\Rightarrow$ (b)". Es sei $A = (a_{ij})_{ij}$.

- Es sei $B = (\delta_{ik}\delta_{j\ell})_{ij}$. Dann ist der (k,ℓ)-te Eintrag von $AB = (a_{ik}\delta_{j\ell})_{ij}$ gerade a_{kk}. Ferner ist der (k,ℓ)-te Eintrag von $BA = (\delta_{ik}a_{\ell j})_{ij}$ gerade $a_{\ell\ell}$.
  Also sind alle Diagonaleinträge gleich.
- Sei B wie oben, $k \neq \ell$. Dann ist der (ℓ,ℓ)-te Eintrag von AB gerade $a_{\ell k}$ und der (ℓ,ℓ)-te Eintrag von BA gerade 0.
  Also sind die nicht-diagonal Einträge 0.

Abgabetermin. Montag, 2.11.2009, 12hct im Übungskasten.