Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. Wilfried Buchholz
Dr. Klaus Aehlig

Wintersemester 2009/10
Blatt 1

Übungen zu "Lineare Algebra I"

Aufgabe 1.
Man löse das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & = & 0 \end{array}$$

Lösungshinweise.
Durch elementare Zeilenumformungen erhält man als äquivalentes Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & = & x_3 & + & 2x_4 \\ x_2 & = & -2x3 & - & 3x_4 \end{array}$$

Aufgabe 2.
Man löse das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösungshinweise.
Durch elementare Zeilenumformungen erhält man $x_1 = x_3$, $x_2 = -2x_3$.

Aufgabe 3.
Man bestimme, für welche $t \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 12 & 7 \\ 1 & 10 & 6 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 12t \\ 12t+7 \\ 7t+8 \end{pmatrix}$$

lösbar ist und gebe die Lösungsmengen an.

Lösungshinweise.
Lösbar für $t = -1$. In diesem Fall sind die Lösungen gegeben durch $x_1 = \frac{1}{4}(-31 + x_3)$, $x_2 = \frac{1}{8}(7 - 5x_3)$.

Aufgabe 4.
Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}^3$ und wie lautet diese jeweils? Wie sieht die Lösungsmenge für diejenigen a aus, für die das Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar ist?

Lösungshinweise.
Durch elementare Zeilenumformungen erhalten wir das äquivalente System

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem ist für $a \neq 0$ eindeutig lösbar mit Lösung $(-5, 2, \frac{-1}{a})$. Für $a = 0$ besitzt das Gleichungssystem keine Lösung.

Abgabetermin. Montag, 26.10.2009, 12hct im Übungskasten.