Erkennungszeichen	**1**	**2a**	**2b**	**3a**	**3b**	**4a**	**4b**	**5a**	**5b**	**6**	Σ	Note
	4	3	3	3	3	2	3	3	3	8	35	

Name:	**Mat.-Nr.:**

Studiengang:

Probeklausur zur Vorlesung "Lineare Algebra"

Prof. Dr. W. Buchholz und Dr. K. Aehlig, Wintersemester 2009/10

Abgabe 25.1.2010

- Schreiben Sie auf jedes Blatt **gut lesbar** Ihren Vor- und Nachnamen. Tragen Sie weiter auf dem Deckblatt auch Ihre Matrikelnummer, sowie Ihren Studiengang samt angestrebtem Abschluß ein.
- Wenn sie eine Veröffentlichung Ihrer Ergebnisse im Internet wünschen, geben sie bitte in dem Kästchen "Erkennungszeichen" links oben ein Zeichen/Codewort an, dass Sie eindeutig identifiziert. Falls das Kästchen nicht leer ist, wird dessen Inhalt zusammen mit den von Ihnen erreichten Punkten veröffentlicht.

  Dies trifft nur auf die Klausur, nicht aber Probeklausur nicht zu; diese Probeklausur wird ganz normal im Übungskasten zurückgegeben.
- Verwenden Sie **nicht** die Farben **rot oder grün**!
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- Es sind **keine Hilfsmittel** (wie z.B. Skriptum oder Musterlösungen von Übungsaufgaben) zugelassen.

VIEL ERFOLG !

Name:

Aufgabe 1
Seien V, W K-Vektorräume und $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Ferner seien $v_1, \ldots, v_m \in V$ und $1 \leq n < m$, so daß $(v_1, \ldots, v_m)$ linear unabhängig und $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von $\mathrm{Ker}(f)$ ist.
Man zeige, daß $(f(v_{n+1}), \ldots, f(v_m))$ linear unabhängig ist. (4)

Name:

Aufgabe 2.

(a) Es seien $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ lineare Abbildungen. Man zeige, daß $\operatorname{Ker}(g \circ f)$ mindestens zweidimensional ist. (3)

(b) Man gebe ein Beispiel für $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ lineare Abbildungen an, so daß $\operatorname{Ker}(g \circ f)$ genau die Dimension 2 hat. (3)

Name:

Aufgabe 3

(a) Sei $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$

und sei $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Bestimmen Sie die darstellende Matrix von f_A bzgl. $\overline{v}$. (3)

(b) Es sei $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ definiert durch $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3x - y \\ 3y - x \end{pmatrix}$.

Man bestimme eine Basis $\overline{v}$, bezüglich der f die darstellende Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ hat. (3)

Name:

Aufgabe 4

Es seien $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineare Abbildungen mit $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$

(a) Man beweise $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0\}$. (2)

(b) Man beweise $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(g) = \mathbb{R}^m$. (3)

Name:

Aufgabe 5

Gegeben sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.

(a) Bestimmen Sie den Rang von A und eine Basis für $\mathrm{Ker}(f_A)$. (3)

(b) Bestimmen Sie eine Basis für $\mathrm{Im}(f_A)$. (3)

Name:

Aufgabe 6.
Bei dieser "multiple choice"-Aufgabe erhalten Sie pro richtige Antwort 1 Punkt und pro falsche Antwort −1 Punkt; wenn Sie keine Antwort geben, wird die entsprechende Teilaufgabe mit 0 Punkten gewertet.
Punktzahl für Aufgabe 6 ist das Maximum aus 0 und der von Ihnen tatsächlich erreichten Punktzahl.

Richtig oder falsch?

(a) Sei X eine Menge und $f\colon X \to X$ eine Abbildung. Ferner sei f injektiv. Dann ist f surjektiv. richtig ☐ ☐ falsch

(b) Sei G eine Gruppe und für alle $a \in G$ gelte $a^2 = e$. Dann ist G abelsch. richtig ☐ ☐ falsch

(c) Sei R ein Ring, $a, b \in R$ mit $ab = 0$. Dann ist $a = 0$ oder $b = 0$. richtig ☐ ☐ falsch

(d) Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Dann ist $(u + v, u + w, v + w)$ ein Erzeugendensystem von $\operatorname{span}(u, v, w)$. richtig ☐ ☐ falsch

(e) Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (x + y)^2 - x^2 - y^2$ ist linear. richtig ☐ ☐ falsch

(f) Es gibt eine injektive lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$. richtig ☐ ☐ falsch

(g) Sei $f\colon \{0\} \to \mathbb{R}$ lineare Abbildung. Dann ist f injektiv. richtig ☐ ☐ falsch

(h) Sei V ein Vektorraum und $f \in \operatorname{Hom}(V, V)$. Dann ist $\operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = V$. richtig ☐ ☐ falsch