Erkennungszeichen	**1**	**2**	**3a**	**3b**	**4**	**5a**	**5b**	**6**	Σ	Note
	4	5	3	4	5	3	3	8	35	

Name:

Mat.-Nr.:

Studiengang:

Nachholklausur zur Vorlesung “Lineare Algebra”

Prof. Dr. W. Buchholz und Dr. K. Aehlig, Wintersemester 2009/10

26.4.2010

- Schreiben Sie auf jedes Blatt **gut lesbar** Ihren Vor- und Nachnamen. Tragen Sie weiter auf dem Deckblatt auch Ihre Matrikelnummer, sowie Ihren Studiengang samt angestrebtem Abschluß ein.
- Wenn sie eine Veröffentlichung Ihrer Ergebnisse im Internet wünschen, geben sie bitte in dem Kästchen “Erkennungszeichen” links oben ein Zeichen/Codewort an, dass Sie eindeutig identifiziert. Falls das Kästchen nicht leer ist, wird dessen Inhalt zusammen mit den von Ihnen erreichten Punkten veröffentlicht.
- Verwenden Sie **nicht** die Farben **rot oder grün**!
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- Es sind **keine Hilfsmittel** (wie z.B. Skriptum oder Musterlösungen von Übungsaufgaben) zugelassen.

VIEL ERFOLG !

Name:

Aufgabe 1

Seien V, W beide K-Vektorräume, $v_1, \ldots, v_n \in V$ und $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$.
Man zeige:
Ist $(f(v_1), ..., f(v_n))$ linear unabhängig so ist auch $(v_1, ..., v_n)$ linear unabhängig. (4)

Name:

Aufgabe 2

Seien V, W endlich dimensionale Vektorräume, $f\colon V \to W$ und $g\colon W \to V$ lineare Abbildungen. Ferner gelte $g \circ f = \mathrm{id}_V$. Man beweise, dass $\dim(V) \leq \dim(W)$. (5)

Name:

Aufgabe 3

Gegeben sei die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto \begin{pmatrix} 5 & -\frac{3}{2} \\ 4 & 0 \end{pmatrix} x$.

(a) Man bestimme die darstellende Matrix von f bezueglich der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (3)

(b) Bezueglich welcher Basis hat f die darstellende Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$? (4)

Name:

Aufgabe 4

Sei X eine Menge und $P \subseteq \mathfrak{P}(X)$. Ferner gelte $\bigcup P = X$ und $\forall A, B \in P(A \cap B = \emptyset \Rightarrow A = B)$. Man beweise, daß durch $x \sim y \Leftrightarrow \exists S \in P(x \in S \land y \in S)$ eine Äquivalenzrelation auf X defniniert wird. (5)

Bemerkung: $\bigcup P$ war definiert als $\bigcup P = \{x \mid \exists A \in P.x \in A\}$.

Name:

Aufgabe 5

Gegeben seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 12 & 12 \\ 4 & 5 & 2 & 17 \\ 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 34 \\ 28 \\ 14 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

Bestimmen Sie:

(a) eine Basis des Lösungsraumes $\text{Lös}(A;0)$ des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ (3)

(b) $\text{Lös}(A;b)$, die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$. (3)

Name:

Aufgabe 6

Bei dieser "multiple choice"-Aufgabe erhalten Sie pro richtige Antwort 1 Punkt und pro falsche Antwort -1 Punkt; wenn Sie keine Antwort geben, wird die entsprechende Teilaufgabe mit 0 Punkten gewertet.

Punktzahl für Aufgabe 6 ist das Maximum aus 0 und der von Ihnen tatsächlich erreichten Punktzahl.

Richtig oder falsch?

(a) Sei G eine Gruppe und gelte für alle $a, b \in G$, daß $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.
Dann ist G abelsch. richtig ☐ ☐ falsch

(b) $\mathbb{R}^{2\times 2} \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe. richtig ☐ ☐ falsch

(c) $\{\} \subseteq \{0\}$ ist linear ein Erzeugendensystem. richtig ☐ ☐ falsch

(d) Sei $f \colon \mathbb{R} \to \{0\}$ Abbildung. Dann ist f linear. richtig ☐ ☐ falsch

(e) Sei V Vektorraum und $f \colon V \to V$ eine lineare und injektive Abbildung. Dann ist f surjektiv. richtig ☐ ☐ falsch

(f) Sei V ein Vektorraum und seien $f, g, h \in \mathrm{End}(V)$.
Dann ist $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$. richtig ☐ ☐ falsch

(g) Sei V ein Vektorraum und $U, W \subseteq V$ Untervektorräume.
Ferner gelte $\dim(U) = \dim(W)$. Dann ist $U = W$. richtig ☐ ☐ falsch

(h) Durch $(n, m) \sim (n', m') \Leftrightarrow n + m' = m + n'$ wird eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert. richtig ☐ ☐ falsch