Erkennungszeichen	**1**	**2a**	**2b**	**3a**	**3b**	**4a**	**4b**	**5a**	**5b**	**6**	Σ	Note
	4	3	3	3	3	2	3	3	3	8	35	

Name:	**Mat.-Nr.:**

Studiengang:

Klausur zur Vorlesung "Lineare Algebra"

Prof. Dr. W. Buchholz und Dr. K. Aehlig, Wintersemester 2009/10

4.2.2010

- Schreiben Sie auf jedes Blatt **gut lesbar** Ihren Vor- und Nachnamen. Tragen Sie weiter auf dem Deckblatt auch Ihre Matrikelnummer, sowie Ihren Studiengang samt angestrebtem Abschluß ein.
- Wenn sie eine Veröffentlichung Ihrer Ergebnisse im Internet wünschen, geben sie bitte in dem Kästchen "Erkennungszeichen" links oben ein Zeichen/Codewort an, dass Sie eindeutig identifiziert. Falls das Kästchen nicht leer ist, wird dessen Inhalt zusammen mit den von Ihnen erreichten Punkten veröffentlicht.
- Verwenden Sie **nicht** die Farben **rot oder grün**!
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **120 Minuten**.
- Es sind **keine Hilfsmittel** (wie z.B. Skriptum oder Musterlösungen von Übungsaufgaben) zugelassen.

VIEL ERFOLG !

Name:

Aufgabe 1

Seien V, W K-Vektorräume, $v_1, \ldots, v_n \in V$ und $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$.

Man zeige:

Ist $(v_1, ..., v_n)$ linear unabhängig und $\mathrm{span}(v_1, ..., v_n) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$,
so ist auch $(f(v_1), ..., f(v_n))$ linear unabhängig. (4)

Name:

Aufgabe 2.
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$.
Man zeige:

(a) $\operatorname{rang}(AB) \leq \operatorname{rang}(A)$ (3)

(b) $\operatorname{rang}(AB) = \operatorname{rang}(B) \;\Rightarrow\; \text{Lös}(AB;0) = \text{Lös}(B;0)$ (3)

Name:

Aufgabe 3

(a) Sei $\overline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ mit $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$

und sei $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit $f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(v_2) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c-1 \end{pmatrix}$, $f(v_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die darstellende Matrix von f bzgl. $\overline{v}$. (3)

(b) Es sei $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ definiert durch $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ x+y \end{pmatrix}$.

Sei $\overline{w}$ die Standardbasis und $\overline{v}$ eine weitere Basis von $\mathbb{R}^2$ und gelte $\mathcal{M}^{\overline{v}}_{\overline{w}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Man bestimme die Basis $\overline{v}$. (3)

Name:

Aufgabe 4

Es sei $(v_1, ..., v_4)$ eine Basis des K-Vektorraums V, sowie $U = \mathrm{span}(v_1, v_1 + v_2)$ und $W = \mathrm{span}(v_2, v_3 - v_1)$.

(a) Man beweise $\dim(U) = \dim(W) = 2$. (2)

(b) Man bestimme je eine Basis von $U + W$ und von $U \cap W$ (mit Begründung). (3)

Name:

Aufgabe 5

Gegeben seien $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -5 \\ 4 & 2 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

Bestimmen Sie:

(a) eine Basis des Lösungsraumes $\text{Lös}(A; 0)$ des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ (3)

(b) $\text{Lös}(A; b)$, die Lösungsmenge des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$. (3)

Name:

Aufgabe 6.
Bei dieser "multiple choice"-Aufgabe erhalten Sie pro richtige Antwort 1 Punkt und pro falsche Antwort -1 Punkt; wenn Sie keine Antwort geben, wird die entsprechende Teilaufgabe mit 0 Punkten gewertet.
Punktzahl für Aufgabe 6 ist das Maximum aus 0 und der von Ihnen tatsächlich erreichten Punktzahl.

Richtig oder falsch?

(a) Sei G eine Gruppe, $\emptyset \neq U \subseteq G$ Teilmenge und gelte $\forall a, b \in U (ab^{-1} \in U)$.
Dann ist U eine Untergruppe von G. richtig ☐ ☐ falsch

(b) Sei G eine Gruppe. Dann gilt für alle $a, b \in G$, daß $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$. richtig ☐ ☐ falsch

(c) Sei G eine Gruppe, $a \in G$ und $a^2 = e$. Dann ist $a = e$. richtig ☐ ☐ falsch

(d) Sei R ein Ring. Dann gilt für alle $a, b \in R$ die Gleichung $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. richtig ☐ ☐ falsch

(e) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so, daß das Gleichungssystem $Ax = 0$ eindeutig lösbar ist.
Dann ist auch das Gleichungssystem $Ax = b$ für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ lösbar. richtig ☐ ☐ falsch

(f) Sei V ein Vektorraum und $u, v, w \in V$, so dass (u, v, w) linear unabhängig ist.
Dann ist $\dim(V) \geq 3$. richtig ☐ ☐ falsch

(g) Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x + 1$ ist linear. richtig ☐ ☐ falsch

(h) Sei V endlichdimensionaler Vektorraum und $f\colon V \to V$ eine lineare und injektive Abbildung. Dann ist f surjektiv. richtig ☐ ☐ falsch