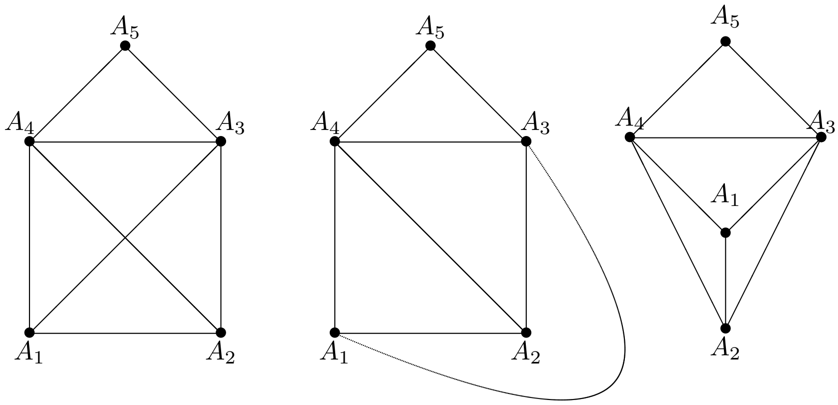
§5 Grundbegriffe der Graphentheorie

Definition

Ein (ungerichteter) *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$ bestehend aus einer Menge $V \neq \emptyset$ von *Knoten* oder *Ecken* (englisch *vertex*) und einer Menge $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$. Die Elemente von E heißen (ungerichtete) *Kanten* (engl. *edge*). Ist $e = \{A_0, A_1\}$ eine Kante, so sagt man, daß die Kante e die Knoten A_0 und A_1 verbindet.

Graphen veranschaulicht man durch *Diagramme*, wobei derselbe Graph durch verschiedene Diagramme dargestellt werden kann. Der Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ und $E = \{\{A_1, A_2\}, \{A_1, A_3\}, \{A_1, A_4\}, \{A_2, A_3\}, \{A_2, A_4\}, \{A_3, A_4\}, \{A_3, A_5\}, \{A_4, A_5\}\}$ wird z.B. durch jedes der folgenden drei Diagramme dargestellt



Definition

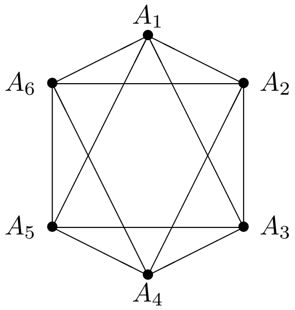
Zwei Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ heißen *isomorph* (in Zeichen $G_1 \cong G_2$), falls es eine bijektive Abbildung $f : V_1 \to V_2$ gibt, so daß für alle $A, B \in V_1$ gilt: $\{A, B\} \in E_1 \iff \{f(A), f(B)\} \in E_2$ (d.h. $E_2 = \{\{f(A), f(B)\} : \{A, B\} \in E_1\}$).

Man nennt f dann einen *Isomorphismus* von G_1 auf G_2.

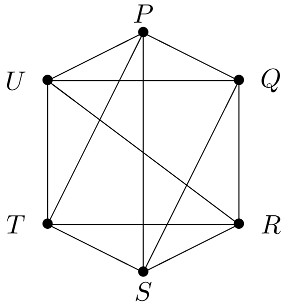
Beispiele.

(a) $f := \{(A_1, Q), (A_2, U), (A_3, R), (A_4, T), (A_5, S), (A_6, P)\}$ ist ein Isomorphismus von G_1 auf G_2:

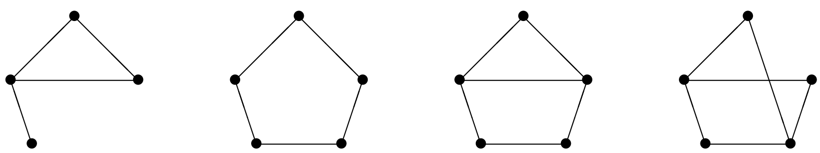
G_1



G_2

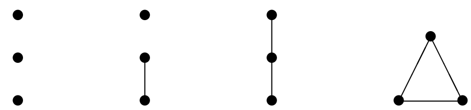


(b) Die folgenden Graphen sind paarweise nicht isomorph:



Bemerkung: Wenn man z.B. sagt, daß es 34 Graphen mit 5 Ecken gibt, dann ist gemeint, daß es 34 Isomorphieklassen solcher Graphen gibt. Unter einer Isomorphieklasse von Graphen versteht man dabei die Gesamtheit der zu einem vorgegebenen Graphen isomorphen Graphen.

In diesem Sinne gibt es z.B. genau 4 Graphen mit 3 Ecken:



Definition

Für jede Ecke A eines Graphen $G = (V, E)$ heißt $\mathrm{grad}_G(A) := |\{e \in E : A \in e\}|$ der *Grad* von A (in G).

5.1 Lemma.

Ist f ein Isomorphismus von G_1 auf G_2, so gilt $\mathrm{grad}_{G_1}(A) = \mathrm{grad}_{G_2}(f(A))$ für alle Ecken A von G_1.

Beweis:

$\mathrm{grad}(f(A)) = |\{e \in E_2 : f(A) \in e\}| = |\{\{f(X), f(Y)\} : \{X, Y\} \in E_1 \,\&\, f(A) \in \{f(X), f(Y)\}\}| =$
$= |\{\{X, Y\} \in E_1 : A \in \{X, Y\}\}| = \mathrm{grad}(A)$.

5.2 Lemma (Euler-Formel oder Handschlaglemma).

Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gilt $\sum_{A \in V} \mathrm{grad}_G(A) = 2 \cdot |E|$.

Insbesondere ist die Anzahl der Knoten $A \in V$ mit ungeradem Grad gerade.

Beweis :

$\mathrm{grad}_G(A) = \sum_{e \in E} \delta(A, e)$, wobei $\delta(A, e) := \begin{cases} 1 & \text{falls } A \in e \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

$\sum_{A \in V} \mathrm{grad}_G(A) = \sum_{A \in V} \sum_{e \in E} \delta(A, e) = \sum_{e \in E} \sum_{A \in V} \delta(A, e) = \sum_{e \in E} 2 = 2|E|$.

[Addiert man alle Eckengrade, so zählen man dabei jede Kante $\{A, B\}$ genau zweimal (einmal bei A und einmal bei B).]

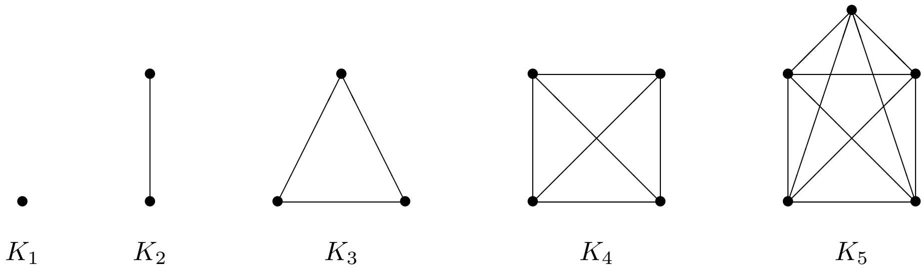
Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

(1) G heißt *bipartit*, wenn es eine disjunkte Zerlegung $V = V_1 \dot\cup V_2$ von V gibt, so daß für jede Kante $e \in E$ gilt $\exists A_1 \in V_1 \exists A_2 \in V_2 (e = \{A_1, A_2\})$.

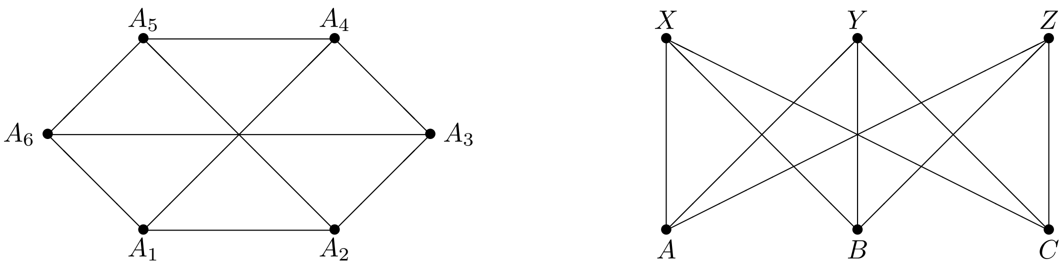
(2) G heißt *vollständig*, wenn $E = \mathcal{P}_2(V)$ ist, d.h. wenn in G je zwei Punkte durch eine Kante verbunden sind.

(3) G heißt *vollständig bipartit*, wenn es eine disjunkte Zerlegung $V = V_1 \dot\cup V_2$ von V gibt, so daß gilt $E = \{\{A_1, A_2\} : A_1 \in V_1 \text{ und } A_2 \in V_2\}$.

Offenbar sind je zwei vollständige Graphen mit n Knoten isomorph zueinander; jeder Graph aus dieser Isomorphieklasse wird mit K_n bezeichnet. Ebenfalls sind je zwei vollständig-bipartite Graphen mit $|V_1| = n$ und $|V_2| = m$ isomorph zueinander; jeder Graph aus dieser Isomorphieklasse wird mit $K_{n,m}$ bezeichnet.



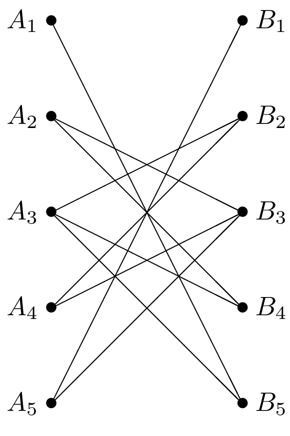
Zwei isomorphe Darstellungen des $K_{3,3}$ ($A \mapsto A_1$, $B \mapsto A_3$, $C \mapsto A_5$, $X \mapsto A_2$, $Y \mapsto A_4$, $Z \mapsto A_6$)



Zur graphentheoretischen Behandlung des bekannten Problems vom Fährmann mit Wolf, Ziege und Kohl verwendet man am geeignetsten einen bipartiten Graphen mit den folgenden Ecken:

	V_1	V_2	
A_1	$FWZK \mid$	$\mid FWZK$	B_1
A_2	$FZK \mid W$	$W \mid FZK$	B_2
A_3	$FWK \mid Z$	$Z \mid FWK$	B_3
A_4	$FWZ \mid K$	$K \mid FWZ$	B_4
A_5	$FZ \mid WK$	$WK \mid FZ$	B_5

Der folgende Graph beschreibt die Lösung des Problems:



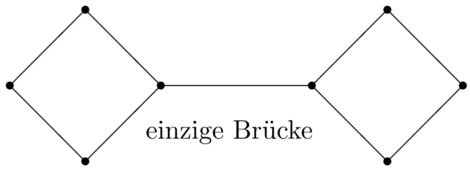
Definition.
Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Unter einem *Kantenzug (in G)* versteht man eine Folge $(A_0, ..., A_n)$ von (nicht notwendig verschiedenen) Ecken von G, so daß $\{A_i, A_{i+1}\} \in E$ für $i = 0, ..., n-1$.
Ein Kantenzug $(A_0, ..., A_n)$ heißt *geschlossen*, wenn $A_0 = A_n$. Ansonsten nennt man den Kantenzug *offen.*
Ein Kantenzug heißt *Weg*, wenn keine Kante mehrfach auftritt, d.h. wenn $\{A_i, A_{i+1}\} \neq \{A_j, A_{j+1}\}$ für $i \neq j$.
Die *Länge* eines Kantenzuges ist die Anzahl seiner Kanten, d.h. der Kantenzug $(A_0, ..., A_n)$ hat Länge n.
Ein geschlossener Weg mit einer Länge ≥ 3 heißt ein *Zyklus* (oder *Zykel*).

Zwei Knoten A, B von G heißen *verbindbar (in G)*, wenn es (in G) einen Kantenzug mit Anfangspunkt A und Endpunkt B gibt. Die Äquivalenzklassen der Relation "verbindbar" heißen *Zusammenhangskomponenten* (kurz *Komponenten*) von G. Ein Graph G heißt *zusammenhängend*, wenn in G je zwei Knoten verbindbar sind, d.h. wenn G nur eine Zusammenhangskomponente besitzt.

5.3 Lemma.
Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann zusammenhängend, wenn für jede disjunkte Zerlegung $V = V_1 \dot{\cup} V_2$ mit $V_1, V_2 \neq \emptyset$ eine Kante $e = \{A, B\}$ mit $A \in V_1$, $B \in V_2$ existiert.
Beweis:
I. Sei G zusammenhängend und $V = V_1 \dot{\cup} V_2$ mit $V_1, V_2 \neq \emptyset$. Dann existieren $P \in V_1$ und $Q \in V_2$. Da G zusammenhängend ist, existiert ein Kantenzug $(A_0, ..., A_n)$ mit $A_0 = P$, $A_n = Q$. Sei k minimal mit $A_k \in V_2$. Dann $k > 0$, $A_{k-1} \in V_1$ und $\{A_{k-1}, A_k\} \in E$.
II. Sei G nicht zusammenhängend und $P \in V$. Sei $V_1 := [P]$ $(= \{A \in V : A \text{ verbindbar mit } P\})$ und $V_2 := V \setminus V_1$. Dann ist auch $V_2 \neq \emptyset$ und es gibt keine Kante $e = \{A, B\}$ mit $A \in V_1$ und $B \in V_2$.

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Kante $e \in E$ heißt *Brücke*, wenn der Graph $G' := (V, E \setminus \{e\})$ mehr Zusammenhangskomponenten als G hat.



5.4 Lemma.
Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $e \in E$. Dann ist Anzahl der Komponenten des Graphen $G' := (V, E \setminus \{e\})$ entweder gleich der Anzahl der Komponenten von G oder um eins größer als diese.
Beweis:
Sei $e = \{P_0, P_1\}$, und seien $V_1, ..., V_k$ die Komponenten von G, wobei $P_0, P_1 \in V_1$. Dann sind $V_2, ..., V_k$ auch Komponenten in G', und V_1 zerfällt in G' in höchstens zwei Komponenten, denn jedes $A \in V_1$ ist mit P_0 oder P_1 verbindbar.

5.5 Lemma.
Ist $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, in dem alle Knoten geraden Grad haben,
so besitzt G keine Brücke.
Beweis:
Sei $e = \{A, B\}$ eine Brücke in G. Nach Lemma 5.4 besitzt dann $G' := (V, E \setminus \{e\})$ genau zwei Komponenten.
Sei $G_1 := (V_1, E_1)$, wobei V_1 die Komponente von A in G' und $E_1 := \{e \in E : e \subseteq V_1\}$.
Für $P \in V_1$ gilt dann $\operatorname{grad}_{G_1}(P) = \begin{cases} \operatorname{grad}_G(P) - 1 & \text{falls } P = A \\ \operatorname{grad}_G(P) & \text{sonst} \end{cases}$.

Mit der Voraussetzung folgt also, daß $\sum_{P \in V_1} \operatorname{grad}_{G_1}(P)$ ungerade ist. Widerspruch zu Lemma 5.2.

Eulersche Wege und Zyklen

Definition. Ein *Eulerscher Weg* in einem Graphen $G = (V, E)$ ist ein Weg, in dem jede Kante $e \in E$ genau einmal vorkommt. Ein *Eulerscher Zyklus* ist ein geschlossener Eulerscher Weg. Ein Graph heißt *eulersch*, wenn er einen Eulerschen Zyklus besitzt.

5.6 Lemma.

Sei G ein Graph und $\alpha = (A_0, ..., A_n)$ ein Weg in G.

Für jeden Punkt P von G sei $\mathrm{grad}_\alpha(P) := |\{i < n : P \in \{A_i, A_{i+1}\}|$.

Dann gilt: $\mathrm{grad}_\alpha(P) \equiv \begin{cases} 1 \bmod 2 & \text{falls } A_0 \neq A_n \text{ und } P \in \{A_0, A_n\} \\ 0 \bmod 2 & \text{sonst} \end{cases}$

Beweis:

Mit $k := |\{i : 0 < i < n \,\&\, P = A_i\}|$ gilt $\mathrm{grad}_\alpha(P) = \begin{cases} 2k+2 & \text{falls } A_0 = A_n = P \\ 2k+1 & \text{falls } A_0 \neq A_n \text{ und } P \in \{A_0, A_n\} \\ 2k & \text{falls } P \notin \{A_0, A_n\} \end{cases}$

5.7 Lemma.

Sei $G = (V, E)$ ein endlicher zusammenhängender Graph, dessen sämtliche Ecken geraden Grad haben.

Sei ferner α ein geschlossener Weg in G, der nicht alle Kanten von G enthält.

Dann läßt sich ein Zyklus α' angeben, der α echt erweitert.

Beweis :

Man wähle eine nicht zu α gehörende Kante $\{B_0, B_1\}$ mit B_0 in α.

(Man überlegt sich leicht, daß es eine solche Kante geben muß: Sei $\{P, Q\}$ eine nicht zu α gehörende Kante. Liegt P auf α, so $B_0 := P$, $B_1 := Q$. Andernfalls existiert ein Kantenzug von P zu einer Ecke von α. Dieser Kantenzug enthält mindestens eine Kante $\{B_0, B_1\}$ mit B_0 in α und B_1 nicht in α.)

Solange wie möglich wählt man nun sukzessive Ecken $B_2, B_3, \ldots$, so daß $(B_0, ..., B_i)$ jeweils ein Weg in G ist, der keine Kante von α enthält. Da G endlich ist, erhält man schließlich einen Weg $\beta = (B_0, ..., B_k)$ derart, daß alle mit B_k inzidenten Kanten zu α oder β gehören. Dann ist $\mathrm{grad}_G(B_k) = \mathrm{grad}_\alpha(B_k) + \mathrm{grad}_\beta(B_k)$. Nach 5.6 ist $\mathrm{grad}_\alpha(B_k)$ gerade und somit auch $\mathrm{grad}_\beta(B_k)$ gerade. Wiederum mit 5.6 folgt daraus $B_0 = B_k$. Es ist $\alpha = (A_0, ..., A_n)$ mit $A_0 = A_n$ und $B_0 = A_j$ für ein $j \leq n$. Offenbar ist $\alpha' := (A_j, \ldots, A_n, A_1, \ldots, A_j, B_1, \ldots, B_k)$ ein Zyklus (denn $A_j = B_0 = B_k$), der α echt erweitert.

5.8 Satz.

Ein endlicher zusammenhängender Graph G ist genau dann eulersch,

wenn alle seine Knoten geraden Grad haben.

Beweis:

1. Ist α ein Eulerscher Zyklus, so gilt $\mathrm{grad}_G(P) = \mathrm{grad}_\alpha(P) \overset{\text{L.5.6}}{\equiv} 0 \bmod 2$, für jeden Knoten P von G.

2. Haben alle Knoten von G geraden Grad, so erhält man durch iterierte Anwendung von 5.7 einen Zyklus, der alle Kanten von G enthält, d.h. einen eulerschen Zyklus.

Korollar

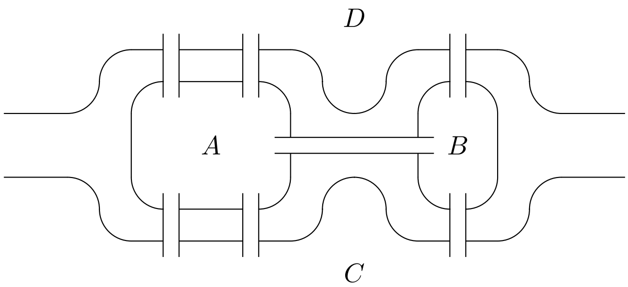
Sei $G = (V, E)$ ein endlicher zusammenhängender Graph und seien $A \neq B$ zwei Knoten ungeraden Grades. Ist dann $\mathrm{grad}_G(P)$ gerade für alle $P \in V \setminus \{A, B\}$, so gibt es in G einen *Eulerschen Weg* von A nach B.

Beweis:
Wir erweitern G zu einem Graphen G' durch Hinzunahme eines Punktes X und der Kanten $\{X, A\}$, $\{X, B\}$. Dann ist G' zusammenhängend und alle Punkte von G' haben geraden Grad. Nach 5.8 besitzt G' also einen Eulerschen Zyklus α. Da $\{X, A\}$, $\{X, B\}$ die einzigen mit X inzidierenden Kanten von G' sind, gilt o.E.d.A. $\alpha = (X, A, ..., B, X)$. Dann ist $(A, ..., B)$ ein Eulerscher Weg in G.

Bemerkung. Das im Beweis von 5.7 beschriebene Verfahren zur Konstruktion eulerscher Zyklen heißt *Algorithmus von Hierholzer.*

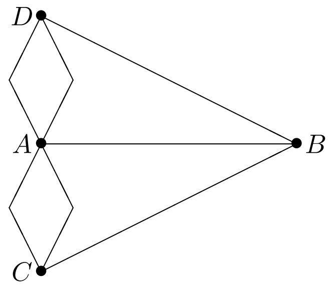
Königsberger Brückenproblem.

Zu finden ist ein Weg, der jede der 7 Brücken genau einmal benützt und zum Ausgangspunkt zurückkehrt.

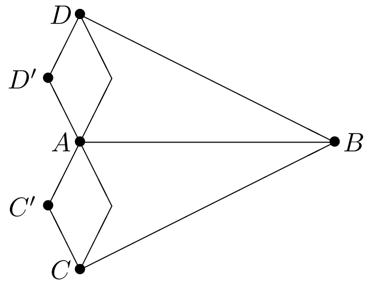


Euler löste dieses Problem im negativen Sinne.

Wenn wir die Brücken durch Kanten darstellen, so haben wir folgenden Multi-Graphen Γ (d.h. Graphen mit evtl. mehr als einer Kante zwischen je zwei Knoten) zu betrachten:



Durch Einführung zusätzlicher Knoten läßt sich das Problem auf eines für (einfache) Graphen zurückführen. Sei also G der folgende Graph:



Das Königsberger Brückenproblem wäre genau dann lösbar, wenn G eulersch wäre, was nach Satz 5.8 offenbar nicht der Fall ist.

Definition. Ein Weg $(A_0, ..., A_n)$ in einem Graphen G heißt *einfach*, wenn $A_i \neq A_j$ für alle $i \neq j$ mit eventueller Ausnahme der Fälle $(i = 0, j = n)$ und $(i = n, j = 0)$. Ein *Hamiltonscher Weg* in einem Graphen G ist ein einfacher Weg, in dem alle Knoten von G vorkommen. Ein *Hamiltonscher Zyklus* ist ein *Hamiltonscher Weg*, der ein Zyklus ist. Ein Graph wird *hamiltonsch* genannt, wenn er einen Hamiltonschen Zyklus besitzt.

5.9 Lemma.
Sei $G = (V, E)$ ein Graph, und seien $A \neq B$ zwei Knoten von G mit $e := \{A, B\} \notin E$ und $\text{grad}_G(A) + \text{grad}_G(B) \geq n := |V|$. Für $G' := (V, E \cup \{e\})$ gilt dann: G hamiltonsch $\iff$ G' hamiltonsch.

Beweis:
Die Richtung "$\Rightarrow$" ist trivial.
"$\Leftarrow$": Sei α ein Hamiltonscher Zyklus von G'.
Fall 1: α enthält die Kante e nicht. Dann ist α auch Hamiltonscher Zyklus von G.
Fall 2: α enthält die Kante e. Dann existiert in G ein Weg $(X_1, ..., X_n)$ mit $X_1 = A$, $X_n = B$ und $V = \{X_1, ..., X_n\}$. Sei $N_A := \{i : \{A, X_i\} \in E \;\&\; 3 \leq i \leq n-1\}$ und $N_B := \{i : \{B, X_{i-1}\} \in E \;\&\; 3 \leq i \leq n-1\}$. Wegen $\{A, B\} \notin E$ gilt $|N_A| + |N_B| = \text{grad}_G(A) + \text{grad}_G(B) - 2 \geq n - 2$. Wäre $N_A \cap N_B = \emptyset$, so $n - 2 \leq |N_A| + |N_B| = |N_A \cup N_B| \leq n-3$, was falsch ist. Also existiert ein $i \in \{3, ..., n-1\}$ mit $\{A, X_i\}, \{B, X_{i-1}\} \in E$. Dann ist $(X_1, X_2, ..., X_{i-1}, X_n, X_{n-1}, ..., X_i, X_1)$ ein Hamiltonscher Zyklus von G. Widerspruch.

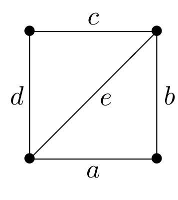
5.10 Satz.
Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $n := |V| \geq 3$.
Gilt für je zwei nicht benachbarte Ecken A, B von G stets $\text{grad}_G(A) + \text{grad}_G(B) \geq n$, so ist G hamiltonsch.

Beweis durch Induktion nach $d_G := |\mathcal{P}_2(V)| - |E|$:
Annahme: G nicht hamiltonsch. — Dann gibt es zwei nicht benachbarte Punkte $A, B \in V$. Nach Voraussetzung ist $\text{grad}_G(A) + \text{grad}_G(B) \geq n$. Sei G' wie in Lemma 5.9 definiert. G' erfüllt ebenfalls die Voraussetzungen des Satzes; außerdem ist $d_{G'} < d_G$. Nach IH ist G' also hamiltonsch. Mit Lemm 5.9 folgt, daß auch G Hamiltonsch ist.

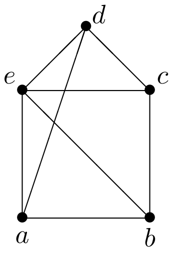
Korollar.
Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $n := |V| \geq 3$.
Haben alle Knoten von G einen Grad $\geq n/2$, so ist G hamiltonsch.

Definition.
Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Unter dem *Kantengraph* (englisch line graph) zu G versteht man den Graphen $L(G) = (E, E')$ mit $E' := \{\, \{e, f\} : e, f \in E \;\&\; |e \cap f| = 1\}$.

G



$L(G)$



Bemerkung.
Ist G ein eulerscher Graph, so ist der zugehörige Kantengraph $L(G)$ hamiltonsch.

Sei $A_0 \overset{e_1}{\text{———}} A_1 \overset{e_2}{\text{———}} A_2 \overset{e_3}{\text{———}} \cdots \text{———} A_{n-1} \overset{e_n}{\text{———}} A_n = A_0$ ein Eulerscher Zyklus in G.
Dann ist $E = \{e_1, ..., e_n\}$, wobei $e_1, ..., e_n$ paarweise verschieden.
Folglich ist $(e_1, ..., e_n, e_1)$ ein Hamiltonscher Zyklus in $L(G)$.

§6 Bäume

6.1 Lemma.

Sei G ein Graph. Sind die Knoten A, B in G verbindbar, so existiert in G ein Weg von A nach B.

Beweis:

Sei $A \neq B$. Nach Voraussetzung gibt es in G einen Kantenzug $(A_0, ..., A_n)$ mit $A_0 = A$ und $A_n = B$. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach n. Sei $(A_0, ..., A_n)$ noch kein Weg. Dann gibt es $i < j \leq n$ mit $A_i = A_j$. Wegen $A_0 \neq A_n$ ist $0 < i$ oder $j < n$; sei etwa $0 < i$. Dann ist $(A_0, ..., A_{i-1}, A_j, ..., A_n)$ ein kürzerer Kantenzug von A_0 nach A_n und die Behauptung folgt mit IH.

Definition.

Ein Graph heißt *azyklisch* (oder *Wald*), wenn er keinen Zykeln besitzt.

Ein *Baum* ist ein zusammenhängender azyklischer Graph.

Für jeden Graph G sei $Komp(G)$ die Menge seiner Zusammenhangskomponenten.

6.2 Lemma.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $e = \{A, B\} \in E$ und $G' = (V, E \setminus \{e\})$. Dann sind äquivalent:

(i) $|Komp(G)| = |Komp(G')|$,

(ii) $Komp(G) = Komp(G')$,

(iii) G besitzt einen e enthaltenden Zyklus.

Beweis:

"(i)⇔(ii)": Siehe Beweis von Lemma 5.4.

"(ii)⇔(iii)": $Komp(G) = Komp(G') \Leftrightarrow A, B$ sind in G' verbindbar $\overset{\text{L.6.1}}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow$ es existiert ein Weg $(B, P_1, ..., P_n, A)$ in G' $\Leftrightarrow$ es existiert ein Zyklus $(A, B, P_1, ..., P_n, A)$ in G.

6.3 Lemma (Kantenabschätzung).

Für jeden endlichen Graphen $G = (V, E)$ gilt $|V| = |E| + |Komp(G)|$, falls G azyklisch,

und $|V| < |E| + |Komp(G)|$ sonst.

Beweis durch Induktion nach $|E|$:

1. $|E| = 0$: Dann ist G azyklisch und es gilt $Komp(G) = \{\{A\} : A \in V\}$, also $|V| = |Komp(G)| + |E|$.

2. $|E| > 0$: 2.1. G enthalte einen Zyklus α. Sei e eine Kante von α und $G' := (V, E \setminus \{e\})$.

Dann $|V| \overset{\text{IH}}{\leq} |E \setminus \{e\}| + |Komp(G')| \overset{\text{L.6.2}}{=} |E| - 1 + |Komp(G)|$.

2.2. G azyklisch: Sei $e \in E$ und $G' := (V, E \setminus \{e\})$. Dann ist auch G' azyklisch und somit gilt

$|V| \overset{\text{IH}}{=} |E| - 1 + |Komp(G')| \overset{6.2,5.4}{=} |E| - 1 + |Komp(G)| + 1 = |E| + |Komp(G)|$.

6.4 Satz (Charakterisierung der azyklischen Graphen).

Für jeden endlichen Graphen $G = (V, E)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) G ist azyklisch.

(ii) Je zwei Knoten von G sind durch höchstens einen Weg verbindbar.

(iii) $|V| = |E| + |Komp(G)|$.

Beweis :

"(i)⇒(ii)": Seien $(A_0, ..., A_n)$, $(B_0, ..., B_m)$ zwei verschiedene Wege von A nach B $(A \neq B)$. O.E.d.A. ist $m \leq n$. Fall 1: $A_k = B_k$ für alle $k \leq m$. Dann ist $m < n$ und $(A_m, ..., A_n)$ ein Zyklus. Fall 2: sonst. Dann existiert ein kleinstes $k < m$, so daß $A_k \neq B_k$. Sei $i > k$ minimal mit $A_i \in \{B_0, ..., B_m\}$, etwa $A_i = B_j$. Ist $j \geq k$, so ist $(A_{k-1}, ..., A_i, B_{j-1}, ..., B_{k-1})$ ein Zyklus. Ist $j < k$, so ist $(A_j, ..., A_k, ..., A_i)$ ein Zyklus. *Widerspruch.*

"(ii)⇒(i)": Ist $(A_0, ..., A_n)$ ein Zyklus in G, so sind (A_0, A_1) und $(A_n, A_{n-1}, ..., A_1)$ zwei verschiedene Wege von A_0 nach A_1.

"(i)⇔(iii)": Lemma 6.3.

6.5 Lemma.

Sei V eine endliche Menge, $R \in V$ und $p : V \setminus \{R\} \to V$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$\forall X \in V \setminus \{R\} \exists k \in \mathbb{N} [\, p^k(X) = R\,] \quad (*).$$

Dann ist (V, E) mit $E := \{\{p(X), X\} : X \in V \setminus \{R\}\}$ ein Baum.

Die Bedingung $(*)$ ist insbesondere dann erfüllt, wenn $V = \{A_0, ..., A_n\}$, $|V| = n+1$, $R = A_0$ und $p(A_i) \in \{A_0, ..., A_{i-1}\}$ für $i = 1, ..., n$ gilt.

Beweis:

1. Für jedes $A \in V \setminus \{R\}$ ist $p(A) \neq A$, denn sonst $\forall n(p^n(A) = A \neq R)$.
2. Für jedes $A \in V$ ist $A, p(A), p^2(A), ..., p^n(A) = R$ ein Kantenzug in (V, E).
3. $A, B \in V \setminus \{R\}$ & $A \neq B \;\Rightarrow\; \{p(A), A\} \neq \{p(B), B\}$,
   denn andernfalls wäre $p(A) = B$ & $A = p(B)$, und somit $\forall k(p^k(A) \in V \setminus \{R\})$.

Nach 1. und 2. ist (V, E) ein zusammenhängender Graph. Nach 3. gilt $|E| = |V| - 1$.
Mit Satz 6.4 folgt also, daß (V, E) ein Baum ist. Der Rest ist klar.

Aufspannende Bäume in Graphen; der Kruskal-Algorithmus

Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt *Untergraph* von G, wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$. Ein *aufspannender Wald* von G ist ein azyklischer Untergraph $G' = (V, E')$ mit $Komp(G) = Komp(G')$. Ein aufspannender Wald, der ein Baum ist, heißt *aufspannender Baum* oder *Spannbaum* von G.

6.6 Satz.

Sei $G = (V, E)$ ein endlicher Graph und (V, E_0) ein azyklischer Untergraph.
Dann besitzt G einen aufspannenden Wald (V, T) mit $E_0 \subseteq T$.

Beweis durch Induktion nach $|E|$:

Sei G kein Wald. Dann gibt es einen Zyklus α in G. Da E_0 azyklisch ist, besitzt α mindestens eine Kante $e \notin E_0$. Sei $G' := (V, E \setminus \{e\})$. Nach IH besitzt G' einen aufspannenden Wald (V, T), mit $E_0 \subseteq T$. Wegen $Komp(G) = Komp(G')$ (siehe L.6.1) ist dieser aber auch aufspannender Wald von G.

Korollar 1. Jeder zusammenhängende Graph besitzt einen aufspannenden Baum.

Korollar 2. Ist G' aufspannender Wald des Waldes G, so $G' = G$.

Beweis: $E' \subseteq E$ & $|E'| = |V| - |Komp(G')| = |V| - |Komp(G)| = |E| \;\Rightarrow\; E' = E$.

6.7 Satz.

Seien $(V, E), (V, E')$ endliche Wälder mit $|E| < |E'|$.

Dann gibt es eine Kante $e \in E' \setminus E$, so daß auch $(V, E \cup \{e\})$ ein Wald ist.

Beweis:

Seien $V_1, ..., V_n$ die Komponenten von (V, E). Wegen $|E| < |E'|$ und Lemma 6.3 kann dann (V, E') höchstens $n{-}1$ Komponenten haben. Deshalb gibt es $i_1, i_2 \in \{1, ..., n\}$ $(i_1 \neq i_2)$ und eine Kante $\{B_1, B_2\} = e \in E' \setminus E$ mit $B_1 \in V_{i_1}$ und $B_2 \in V_{i_2}$. Offenbar ist nun auch $(V, E \cup \{e\})$ ein Wald. (Ein Kreis α in $(V, E \cup \{e\})$ müßte e enthalten, und α ohne e wäre dann eine Verbindung von B_1 und B_2 in (V, E).)

6.8 Lemma.

Sei $G = (V, E)$ ein endlicher Graph und $\mathcal{T}$ die Menge aller azyklischen Teilmengen von E. Dann gilt:

(V, T) ist aufspannender Wald von $G \iff T$ ist maximales Element von $(\mathcal{T}, \subseteq)$.

Beweis:

"$\Leftarrow$": Sei T ein maximales Element von $(\mathcal{T}, \subseteq)$. Nach Satz 6.6 besitzt G einen aufspannenden Wald (V, T') mit $T \subseteq T'$. Dann ist auch $T' \in \mathcal{T}$, also $T = T'$ und somit (V, T) ein aufspannender Wald von G.

"$\Rightarrow$": Sei (V, T) aufsp. Wald von G. Dann $T \in \mathcal{T}$ und es existiert ein maximales Element $T' \in \mathcal{T}$ mit $T \subseteq T'$. Wegen "$\Leftarrow$" ist T' ein aufsp. Wald von G. Es folgt $|T| = |V| - |Komp(G)| = |T'|$ und somit $T = T'$.

Definition.

Sei (V, E) ein Graph und $w : E \to \mathbb{R}$ eine Funktion *(Gewichtsfunktion)*.

Für $T \subseteq E$ sei $w(T) := \sum_{e \in T} w(e)$ *(Gewicht von T)*.

6.9 Satz (Algorithmus von Kruskal)

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ mit $E = \{e_1, ..., e_m\}$ $(|E| = m)$ und eine Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}$, so daß $w(e_1) \leq ... \leq w(e_m)$.

Definition: $T_1 := \emptyset, \quad T_{k+1} := \begin{cases} T_k \cup \{e_k\} & \text{falls } (V, T_k \cup \{e_k\}) \text{ Wald} \\ T_k & \text{sonst} \end{cases}, \quad T := T_{m+1}$.

Behauptung:

(V, T) ist ein w-minimaler aufspannender Wald von G, d.h. (V, T) ist aufspannender Wald von G und $w(T) \leq w(T')$ für jeden aufspannenden Wald (V, T') von G.

Beweis:

Offenbar ist T eine maximale azyklische Teilmenge von E.

Nach Lemma 6.8 ist also (V, T) ein aufspannender Wald von G.

Sei nun $T = \{e_{k(1)}, ..., e_{k(l)}\}$ mit $k(1) < ... < k(l)$, und sei (V, T') irgendein aufspannender Wald von G. Dann $|T'| = |V| - |Komp(V, T')| = |V| - |Komp(G)| = |T| = l$, also $T' = \{g_1, ..., g_l\}$ mit $w(g_1) \leq ... \leq w(g_l)$.

Annahme: $w(T') < w(T)$.

Dann existiert ein $i \in \{1, ..., l\}$ mit $w(g_i) < w(e_{k(i)})$ und $w(g_\nu) \geq w(e_{k(\nu)})$ für $\nu = 1, ..., i{-}1$.

Satz 6.7 angewandt auf die Kantenmengen $E_1 := \{g_1, ..., g_i\}$ und $E_0 := \{e_{k(1)}, ..., e_{k(i-1)}\}$ liefert ein $j \in \{1, ..., i\}$, so daß $g_j \notin E_0$ und $(V, E_0 \cup \{g_j\})$ ein Wald ist. Nun gilt $w(g_j) \leq w(g_i) < w(e_{k(i)})$, also $g_j = e_{k'}$ mit $k' < k(i)$. Nach Definition ist $T_{k'} \subseteq T_{k'+1} \subseteq T_{k(i)} = \{e_{k(1)}, ..., e_{k(i-1)}\} = E_0$. Da $(V, E_0 \cup \{g_j\})$ ein Wald ist, muß somit auch $(V, T_{k'} \cup \{e_{k'}\})$ ein Wald und folglich $T_{k'+1} = T_{k'} \cup \{e_{k'}\}$ sein. Also $g_j = e_{k'} \in T_{k'+1} \subseteq E_0$. *Widerspruch.*

Bemerkung.
Sortiert man in 6.9 die Kanten derart, daß $w(e_1) \geq ... \geq w(e_m)$, so liefert der Algorithmus von Kruskal einen w-maximalen aufspannenden Baum.

Beispiel ("bottleneck problem")
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender endlicher Graph und $w : E \to \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.
Für jeden Weg $\alpha = (B_0, ..., B_k)$ in G heißt $c(\alpha) := \min\{w(B_i, B_{i+1}) : i < k\}$ der *untere Querschnitt* oder die *Kapazität* von α (Querschnitt der Röhren in einem Leitungssystem, Kapazität einer Straßenverbindung).
Gesucht ist für jede zwei Punkte A, B ein Weg von A nach B von maximaler Kapazität.

6.10 Lemma.
Sei G, w wie oben und (V, T) ein w-maximaler aufspannender Baum von G.
Dann ist für je zwei $A, B \in V$ der Weg von A nach B in T ein Weg maximaler Kapazität.

Beweis:
$\alpha = (B_0, ..., B_l)$ sei der Weg von A nach B in T und $e = \{B_j, B_{j+1}\}$ eine Kante mit $c(\alpha) = w(e)$. Dann ist $(V, T \setminus \{e\})$ ein Wald mit genau 2 Komponenten V_1, V_2. Offenbar ist $\{\{C_1, C_2\} \in T : C_1 \in V_1 \;\&\; C_2 \in V_2\} = \{e\}$. Annahme: α' ist Weg von A nach B in G mit $c(\alpha') > c(\alpha)$. α' muß eine Kante $f = \{P, Q\}$ mit $P \in V_1 \;\&\; Q \in V_2$ enthalten. Dann $w(f) \geq c(\alpha') > c(\alpha) = w(e)$, und $T' := (T \setminus \{e\}) \cup \{f\}$ wäre aufspannender Baum mit $w(T') > w(T)$. Widerspruch.

§7 Abstände in bewerteten Graphen

Definition.
Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

Für $A \in V$ sei $\mathsf{Ad}_G(A) := \{X \in V : \{A, X\} \in E\}$.

Für $A, B \in V$ sei

$$d_G(A, B) := \begin{cases} \min\{\mathit{Länge}(\alpha) : \alpha \text{ ist Weg von } A \text{ nach } B\} & \text{falls ein solcher Weg existiert} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \qquad \textit{(Abstand)}$$

Der *Algorithmus von Moore* liefert (zu jedem vorgegebenen Knoten A von G) die Abstände $d_G(A, P)$ für alle Knoten P von G.

7.1 Satz. (Algorithmus von Moore)
Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $A \in V$. Definiert man $W_k \subseteq V$ durch

$$W_0 := \{A\} \;, \;\; W_{k+1} := \bigcup\nolimits_{X \in W_k} \mathsf{Ad}_G(X) \setminus W_{\leq k}, \text{ wobei } W_{\leq k} := W_0 \cup \ldots \cup W_k \;,$$

so gilt $W_k = \{P \in V : d_G(A, P) = k\}$.

Beweis:
$d_G(A, P) = k{+}1 \;\Leftrightarrow\; \exists Q(d_G(A, Q) = k \;\&\; P \in \mathsf{Ad}_G(Q)) \;\&\; d_G(A, P) > k \overset{\text{IH}}{\Leftrightarrow}$
$\Leftrightarrow\; \exists Q \in W_k(P \in \mathsf{Ad}_G(Q)) \;\&\; P \notin W_{\leq k} \;\Leftrightarrow\; P \in W_{k+1}$.

Definition.

Ein *bewerteter Graph* (oder *Netzwerk*) ist ein Paar (G, w) bestehend aus einem Graphen $G = (V, E)$ sowie einer *Bewertungsfunktion* $w : E \to \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Für jede Kante $e \in E$ heißt $w(e)$ das *Gewicht* (oder die *Länge*) von e.

Für $A, B \in V$ setzen wir $w(A,B) := \begin{cases} w(\{A,B\}) & \text{falls } \{A,B\} \in E \\ 0 & \text{falls } A = B \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$.

Ferner sei $a + \infty := \infty + a := \infty$ für alle $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Für jede Punktfolge $\alpha = (A_0, ..., A_l)$ in G sei $w(\alpha) := \sum_{i<l} w(A_i, A_{i+1})$.

Ist α ein Kantenzug in G, so nennt man $w(\alpha)$ das *Gewicht* (oder die *Länge*) von α.

Der *Abstand* zweier Knoten A, B in (G, w) ist

$$d(A,B) := d_{G,w}(A,B) := \min(\{\infty\} \cup \{w(\alpha) : \alpha \text{ Weg von } A \text{ nach } B\})$$
$$(= \min\{w(\alpha) : \alpha \text{ Punktfolge von } A \text{ nach } B\})$$

Es gilt dann: (i) $d(A,A) = 0$, (ii) $d(A,B) = d(B,A)$, (iii) $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$.

Der *verallgemeinerte Warshall-Algorithmus* dient zur simultanen Bestimmung aller Abstände $d_{G,w}(A,B)$ in einem bewerteten Graphen (G, w).

7.2 Satz. (Verallgemeinerter Warshall-Algorithmus)

Sei (G, w) ein bewerteter Graph mit $G = (V, E)$, $V = \{A_0, ..., A_n\}$, $|V| = n+1$.

Eine Punktfolge $(B_0, ..., B_m)$ in G nennen wir eine i-Folge,

wenn ihre Zwischenpunkte $B_1, ..., B_{m-1}$ in $\{A_0, ..., A_{i-1}\}$ liegen.

Durch Rekursion nach i definieren wir Werte d^i_{jk} wie folgt:

$d^0_{jk} := w(A_j, A_k)$, $d^{i+1}_{jk} := \min\{d^i_{jk}, d^i_{ji} + d^i_{ik}\}$.

Dann ist $d^i_{jk} = \min\{w(\alpha) : \alpha \ i\text{-Folge von } A_j \text{ nach } A_k\}$. Insbesondere $\boxed{d^{n+1}_{jk} = d_{G,w}(A_j, A_k)}$.

Beweis:

Definition. Für $\beta = (B_0, ..., B_m)$ und $\beta' = (B_m, B_{m+1}, ..., B_k)$ sei $\beta|\beta' := (B_0, ..., B_m, B_{m+1}, ..., B_k)$.

Durch Induktion nach i definieren wir für alle $j, k \leq n$ eine i-Folge α^i_{jk} von A_j nach A_k mit $w(\alpha^i_{jk}) = d^i_{jk}$:

1. $\alpha^0_{jk} := \begin{cases} (A_j) & \text{falls } j = k \\ (A_j, A_k) & \text{sonst} \end{cases}$; 2. $\alpha^{i+1}_{jk} := \begin{cases} \alpha^i_{ji}|\alpha^i_{ik} & \text{falls } d^i_{ji} + d^i_{ik} < d^i_{jk} \\ a^i_{jk} & \text{sonst} \end{cases}$

Bleibt zu zeigen: Für jede i-Folge α von A_j nach A_k ist $d^i_{jk} \leq w(\alpha)$:

$i = 0$: klar.

Schritt von i auf $i+1$:

1. Sei $\alpha = (A_j, B_1, ..., B_m, A_k)$ eine $i+1$-Folge:

1.1. α ist i-Folge: Dann $d^{i+1}_{jk} \leq d^i_{jk} \overset{\text{IH}}{\leq} w(\alpha)$.

1.2. α ist keine i-Folge: Dann gibt es $1 \leq \nu_1 \leq \nu_2 \leq m$, so daß $B_{\nu_1} = B_{\nu_2} = A_i$ und $\alpha_1 := (A_0, B_1, ..., B_{\nu_1})$, $\alpha_2 := (B_{\nu_2}, ..., A_k)$ sind i-Folgen. Es folgt: $d^{i+1}_{jk} \leq d^i_{ji} + d^i_{ik} \overset{\text{IH}}{\leq} w(\alpha_1) + w(\alpha_2) \leq w(\alpha)$.

Der *Algorithmus von Dijkstra* dient (bei vorgegebenem Anfangsknoten A_0) zur simultanen Bestimmung aller Abstände $d_{G,w}(A_0, B)$ in einem bewerteten Graphen (G, w). Zugleich liefert der Algorithmus einen aufspannenden Baum von G.

7.3 Satz (Algorithmus von Dijkstra).
Sei (G, w) ein zusammenhängender bewerteter Graph mit $G = (V, E)$, $|V| = n+1$.

Für $k = 0, ..., n$ definieren wir $A_k \in V$, $d_k : V \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, $p_k : V \to V \cup \{\infty\}$ wie folgt:

I. $A_0 \in V$ beliebig, $d_0(A_0) := 0$, $d_0(X) := \infty$ für $X \neq A_0$, $p_0(X) := \infty$.

II. Für $k < n$ sei $d_{k+1}(X) := \min\{d_k(X), d_k(A_k) + w(A_k, X)\}$ $(X \in V)$;
$A_{k+1} \in V \setminus \{A_0, ..., A_k\}$ wird so gewählt, daß $d_{k+1}(A_{k+1}) \leq d_{k+1}(X)$ für alle $X \in V \setminus \{A_0, ..., A_k\}$;
$p_{k+1}(X) := \begin{cases} A_k & \text{falls } d_{k+1}(X) < d_k(X) \\ p_k(X) & \text{sonst} \end{cases}$.

Dann ist $V = \{A_0, ..., A_n\}$ und es gilt:

(a) $d(A_0, A_k) = d_n(A_k) = \ldots = d_k(A_k) \leq \ldots \leq d_0(A_k)$, für $k = 0, ..., n$.

(b) Für $0 < k \leq n$ gilt $p_k(A_k) \in \{A_0, ..., A_{k-1}\}$ und $d(A_0, A_k) = d(A_0, p_k(A_k)) + w(p_k(A_k), A_k) < \infty$.

(c) $G^* := (V, E^*)$ mit $E^* := \{\{p_k(A_k), A_k\} : 0 < k \leq n\}$ ist ein aufspannender Baum von G, und $d_{G^*}(A_0, X) = d_G(A_0, X)$ für alle $X \in V$.

Beweis:

Hilfssatz.

(1) $d_n(X) \leq ... \leq d_0(X)$;

(2) $d(A_0, X) \leq d_k(X)$;

(3) $\beta = (B_0, ..., B_l)$ ein Weg von A_0 nach A_k, so $d_k(A_k) \leq w(\beta)$.

Beweis: (1) klar.

(2) Induktion nach k:
$d_{k+1}(X) = d_k(X) \overset{\text{IH}}{\geq} d(A_0, X)$ oder $d_{k+1}(X) = d_k(A_k) + w(A_k, X) \overset{\text{IH}}{\geq} d(A_0, A_k) + w(A_k, X) \geq d(A_0, X)$.

(3) Induktion nach k: 1. $k = 0$: trivial.

2. $k \to k+1$: Sei $\beta = (B_0, ..., B_l)$ ein Weg von A_0 nach A_{k+1}.

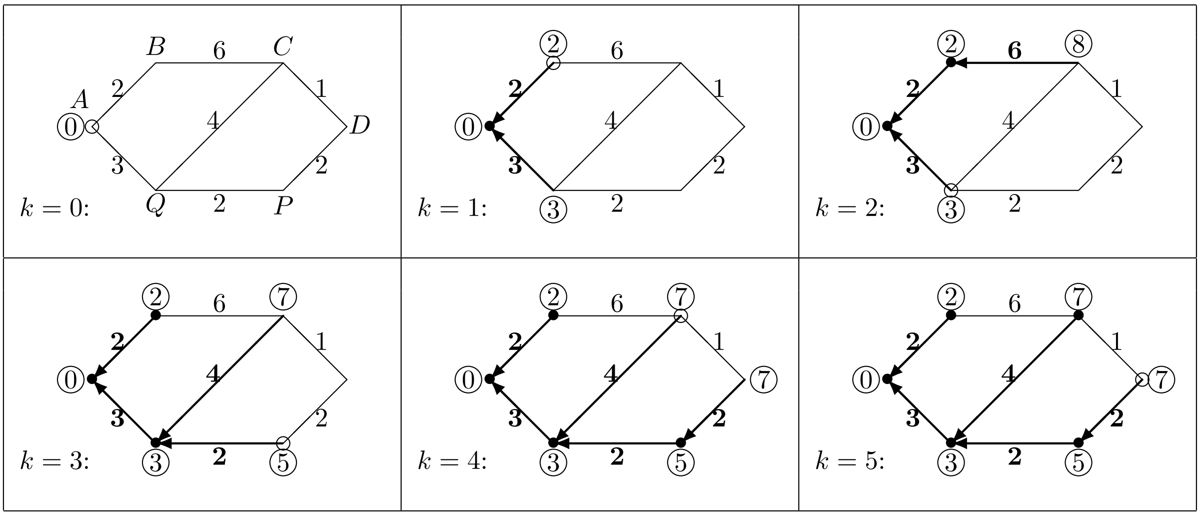
Dann existiert $i < l$ und $j \leq k$ mit $B_i = A_j$ und $B_{i+1} \notin \{A_0, ..., A_k\}$. Es folgt
$d_{k+1}(A_{k+1}) \overset{\text{Def.}}{\leq} d_{k+1}(B_{i+1}) \overset{(1)}{\leq} d_{j+1}(B_{i+1}) \overset{\text{Def.}}{\leq} d_j(A_j) + w(A_j, B_{i+1}) \overset{\text{IH}}{\leq} w(B_0, ..., B_i) + w(B_i, B_{i+1}) \leq w(\beta)$.

(a) Aus dem Hilfssatz folgt $d(A_0, A_k) \overset{(2)}{\leq} d_n(A_k) \overset{(1)}{\leq} ... \leq d_k(A_k) \overset{(3)}{\leq} d(A_0, A_k)$.

(b) Sei $0 < k \leq n$. Da V zusammenhängend ist, gilt $d(A_0, A_k) < \infty$.
Wegen (a) und $d_0(A_k) = \infty$ gibt es deshalb ein $k_0 < k$ mit $d(A_0, A_k) = d_k(A_k) = ... = d_{k_0+1}(A_k) < d_{k_0}(A_k)$.
Dann gilt $p_k(A_k) \overset{\text{Def.}}{=} p_{k_0+1}(A_k) \overset{\text{Def.}}{=} A_{k_0}$ und $d(A_0, A_k) = d_{k_0+1}(A_k) \overset{\text{Def.}}{=} d_{k_0}(A_{k_0}) + w(A_{k_0}, A_k) \overset{\text{(a)}}{=} d(A_0, A_{k_0}) + w(A_{k_0}, A_k)$.

(c) folgt aus (b) mittels Lemma 6.5. ($\{p_k(A_k), A_k\} \in E$ folgt aus $w(p_k(A_k), A_k) < \infty$.)

Beispiel.



	A_0	A_1	A_4	A_5	A_3	A_2
	A	B	C	D	P	Q
d_0	0	∞	∞	∞	∞	∞
d_1	0	2	∞	∞	∞	3
d_2	0	2	8	∞	∞	3
d_3	0	2	7	∞	5	3
d_4	0	2	7	7	5	3