Erkennungszeichen	**1**	**2**	**3**	**4a**	**4b**	**5a**	**5b**	**6**	Σ	Note
	4	8	7	3	3	4	3	8	40	

Name:	**Mat.-Nr.:**

Prüfungsamt:

Wiederholungsklausur zur Vorlesung "Diskrete Strukturen"

Prof. Dr. W. Buchholz und Dr. K. Aehlig, Sommersemester 2009

2.11.2009

- Schreiben Sie auf jedes Blatt **gut lesbar** Ihren Namen. Tragen Sie weiter auf dem Deckblatt auch Ihre Matrikelnummer, sowie das Prüfungsamt ein, an das das Ergebnis gemeldet werden soll. *(Sollten keine Ergebnismeldung nötig sein, so tragen Sie hier das Wort* SCHEIN *ein und geben ein ausgefülltes Scheinformular ab.)*
- Wenn sie eine Veröffentlichung Ihrer Ergebnisse im Internet wünschen, geben sie bitte in dem Kästchen "Erkennungszeichen" links oben ein Zeichen/Codewort an, dass Sie eindeutig identifiziert. Falls das Kästchen nicht leer ist, wird dessen Inhalt zusammen mit den von Ihnen erreichten Punkten veröffentlicht.
- Verwenden Sie **nicht** die Farben **rot oder grün**!
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **135 Minuten**.
- Es sind **keine Hilfsmittel** (wie z.B. Skriptum oder Musterlösungen von Übungsaufgaben) zugelassen.

VIEL ERFOLG !

Name:

Aufgabe 1.
Sei $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}(f(a + b, c) = f(a, c) + f(b, c))$.
Man beweise durch vollständige Induktion:
$f(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i, b) = \sum\limits_{i=0}^{n} f(a_i, b)$ für $a_0, \ldots, a_n, b \in \mathbb{Z}$. (4)

Name:

Aufgabe 2.
Sei $\mathbb{Q}^* := \{x \in \mathbb{Q} : x \neq 0\}$. Sei ferner U eine Teilmenge von $\mathbb{Q}^*$ und
$\sim_U$ die binäre Relation $\{(x,y) \in \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^* : \frac{x}{y} \in U\}$,
d.h. für $x, y \in \mathbb{Q}^*$ gelte: $x \sim_U y \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{y} \in U$.
Man beweise:
$\sim_U$ ist genau dann eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Q}^*$, wenn gilt $1 \in U$ & $\forall x, y \in U(\frac{x}{y} \in U)$. (8)

Name:

Aufgabe 3.

Man bestimme $n \in \{0, \ldots, 76\}$, so daß $n^{37} \equiv 2 \texttt{ mod } 77$. (7)

Name:

Aufgabe 4.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $n = |V| \geq 1$.
G sei *selbstkomplementär*, d.h. G sei isomorph zu $\overline{G} := (V, \overline{E})$, wobei
$\overline{E} := \mathcal{P}_2(V) \setminus E = \{e \in \mathcal{P}_2(V) : e \notin E\}$.
Man zeige:

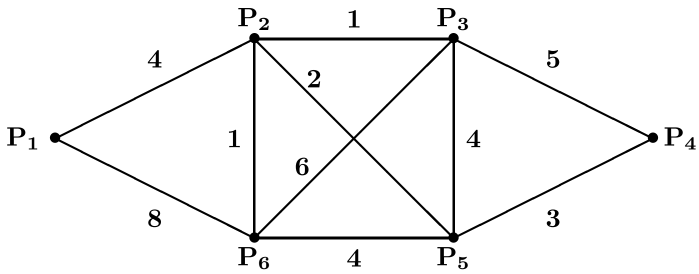
(a) $n \equiv 0 \texttt{ mod } 4$ oder $n \equiv 1 \texttt{ mod } 4$. (3)

(b) Ist $n \geq 2$, so gilt $\mathrm{grad}_G(A) \geq 1$ für alle $A \in V$. (3)

Name:

Aufgabe 5

(G, w) sei der folgende bewertete Graph.



(a) Mit dem Algorithmus von Dijkstra bestimme man die Abstände $d(P_1, P_k)$ $(k = 1, ..., 6)$ und skizziere den zugehörigen aufspannenden Baum von G. (4)

(b) Mit dem Algorithmus von Kruskal bestimme man einen w-maximalen aufspannenden Baum von G (d.h. einen aufspannenden Baum mit maximalem Gewicht). (3)

Name:

Aufgabe 6.
Bei dieser "multiple choice"-Aufgabe erhalten Sie pro richtige Antwort 1 Punkt und pro falsche Antwort -1 Punkt; wenn Sie keine Antwort geben, wird die entsprechende Teilaufgabe mit 0 Punkten gewertet.
Punktzahl für Aufgabe 6 ist das Maximum aus 0 und der von Ihnen tatsächlich erreichten Punktzahl.

Richtig oder falsch?

- $\{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$ ist ein primes Restsystem modulo 18. richtig ☐ ☐ falsch
- Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ und $m \geq 2$ mit $ab \equiv 1 \texttt{ mod } m$ gilt $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$. richtig ☐ ☐ falsch
- Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt $(a + b)^3 \equiv a^3 + b^3 \texttt{ mod } 3$. richtig ☐ ☐ falsch
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ und Primzahlen p gilt: $p^2|n(n+1) \Rightarrow p^2|n$ oder $p^2|n+1$. richtig ☐ ☐ falsch
- Für einen Graphen $G = (V, E)$ gelte $|V| = |E| + 1$. Dann ist G ein Baum richtig ☐ ☐ falsch
- Für $n \geq 1$ ist der vollständig bipartite Graph $K_{n,n}$ genau dann eulersch, wenn n gerade ist. richtig ☐ ☐ falsch
- Für $n \geq 1$ besitzt der vollständig bipartite Graph $K_{n,n}$ genau dann einen hamiltonschen Weg, wenn n gerade ist. richtig ☐ ☐ falsch
- Es gibt eine injektive Abbildung $f : \{0, 1, 2, \ldots, 15\} \to \mathcal{P}(\{2, 4, 6, 8\})$, die nicht surjektiv ist. richtig ☐ ☐ falsch