Erkennungszeichen	**1a**	**1b**	**2a**	**2b**	**3**	**4**	**5a**	**5b**	**6**	Σ	Note
	3	4	4	2	7	4	4	3	9	40	

Name:	**Mat.-Nr.:**

Prüfungsamt:

Klausur zur Vorlesung "Diskrete Strukturen"

Prof. Dr. W. Buchholz und Dr. K. Aehlig, Sommersemester 2009

16.7.2009

- Schreiben Sie auf jedes Blatt **gut lesbar** Ihren Namen. Tragen Sie weiter auf dem Deckblatt auch Ihre Matrikelnummer, sowie das Prüfungsamt ein, an das das Ergebnis gemeldet werden soll. *(Sollten keine Ergebnismeldung nötig sein, so tragen Sie hier das Wort* SCHEIN *ein und geben ein ausgefülltes Scheinformular ab.)*
- Wenn sie eine Veröffentlichung Ihrer Ergebnisse im Internet wünschen, geben sie bitte in dem Kästchen "Erkennungszeichen" links oben ein Zeichen/Codewort an, dass Sie eindeutig identifiziert. Falls das Kästchen nicht leer ist, wird dessen Inhalt zusammen mit den von Ihnen erreichten Punkten veröffentlicht.
- Verwenden Sie **nicht** die Farben **rot oder grün**!
- Die **Bearbeitungszeit** beträgt **135 Minuten**.
- Es sind **keine Hilfsmittel** (wie z.B. Skriptum oder Musterlösungen von Übungsaufgaben) zugelassen.

VIEL ERFOLG !

Name:

Aufgabe 1

(a) Man beweise mit Hilfe des Binomischen Satzes: $2n^n \leq (n+1)^n$ für alle $n \geq 1$. (3)

(b) Man beweise durch vollständige Induktion: $2^n \cdot n! < n^n$ für alle $n \geq 6$. (4)

Name:

Aufgabe 2

Sei $n = p_0^{n_0} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$ mit $n_0, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ und paarweise verschiedenen Primzahlen $p_0, \ldots, p_k$.
Man beweise:

(a) $\big|\{x \in \mathbb{N} : x|n\}\big| = (n_0{+}1) \cdot \ldots \cdot (n_k{+}1).$ (4)

(b) $\exists m(n = m^2) \iff (n_0{+}1) \cdot \ldots \cdot (n_k{+}1) \equiv 1 \texttt{ mod } 2.$ (2)

Name:

Aufgabe 3

Man bestimme $n \in \{0, \ldots, 142\}$, so daß $n^{103} \equiv 9 \bmod 143$. (7)

Name:

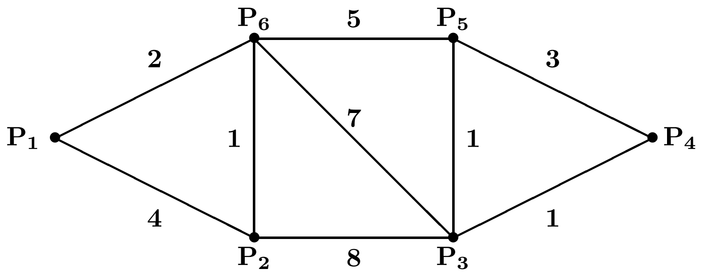
Aufgabe 4

Sei $G = (V, E)$ ein Baum und $\emptyset \neq V' \subseteq V$, so daß $\mathrm{grad}_G(A) = 1$ für alle Knoten $A \notin V'$.
Man zeige: Der Graph $G' = (V', E')$ mit $E' := \{e \in E : e \subseteq V'\}$ ist ebenfalls ein Baum. (4)

Name:

Aufgabe 5

(G, w) sei der folgende bewertete Graph.



(a) Mit dem Algorithmus von Dijkstra bestimme man die Abstände $d(P_1, P_k)$ $(k = 1, ..., 6)$ und skizziere den zugehörigen aufspannenden Baum von G. (4)

(b) Mit dem Algorithmus von Kruskal bestimme man einen w-minimalen aufspannenden Baum von G (d.h. einen aufspannenden Baum mit minimalem Gewicht). (3)

Name:

Aufgabe 6.
Bei dieser “multiple choice”-Aufgabe erhalten Sie pro richtige Antwort 1 Punkt und pro falsche Antwort -1 Punkt; wenn Sie keine Antwort geben, wird die entsprechende Teilaufgabe mit 0 Punkten gewertet.
Punktzahl für Aufgabe 6 ist das Maximum aus 0 und der von Ihnen tatsächlich erreichten Punktzahl.

Richtig oder falsch?

(a) $\{1, 5, 7, 11, 13, 19\}$ ist ein primes Restsystem modulo 18. richtig ☐ ☐ falsch

(b) Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ und $m \geq 1$ mit $ab \equiv 1 \ \texttt{mod}\ m$ gilt $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$. richtig ☐ ☐ falsch

(c) Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt $(a + b)^2 \equiv a^2 + b^2 \ \texttt{mod}\ 2$. richtig ☐ ☐ falsch

(d) Für beliebige $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq 1$ ist durch
$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}nm \to \mathbb{Z}/\mathbb{Z}n \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}m$, $[x]_{nm} \mapsto ([x]_n, [x]_m)$ eine Bijektion definiert. richtig ☐ ☐ falsch

(e) Ein Graph ist genau dann ein Baum, wenn jede seiner Kanten eine Brücke ist. richtig ☐ ☐ falsch

(f) Für alle $n \geq 3$ enthält der K_n einen hamiltonschen Weg. richtig ☐ ☐ falsch

(g) Für alle $n \geq 3$ ist der K_n eulersch. richtig ☐ ☐ falsch

(h) Es gibt unendlich viele Mengen X, so daß jede Abbildung $f\colon X \to X$ surjektiv ist. richtig ☐ ☐ falsch

(i) Es gibt eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die nicht injektiv ist. richtig ☐ ☐ falsch